

En las ciudades invisibles II

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

διαλογο εντρε Μαρκο Πολο λ Κιμπλαϊ Γιαν

Los futuros no realizados son sólo ramas del pasado: ramas secas.

El modelo del presente como un punto que recorre la recta del tiempo dejando el pasado a la izquierda y el futuro a la derecha, es demasiado simple. Calvino admite más de un posible futuro aunque al final sólo vivamos uno de ellos, ya sea por voluntad propia o impuesta. Los demás dejan inmediatamente de pertenecer tanto a nuestro futuro como a nuestro pasado.

Todo el mundo tiene alguna rama seca. La felicidad o infelicidad presentes endulzan o amargan su recuerdo. El sistema de Calvino es el de las bifurcaciones de las ramas de un árbol y como tal, las bifurcaciones en cada momento pueden ser múltiples. En cada instante t podemos considerar dos funciones. Una, $F(t)$, el número de futuros posibles que se nos plantean. La otra, $D(t)$, la capacidad de decisión para elegir uno de esos futuros, es decir, el número de futuros sobre los que tenemos poder para decidir.

Si la esperanza de vida de una persona es de a años. Podemos suponer que nacemos con una infinidad de futuros posibles, pero morimos con uno solo ($F(0)=\infty, F(a)=1$). Además, los futuros posibles decrecen a lo largo de la vida ($F'(t)<0$). No es difícil hallar una función continua con estas características:

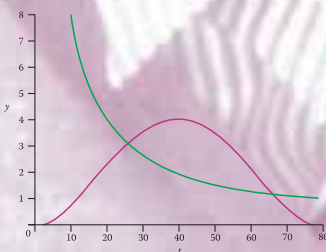
$$F(t) = \frac{a}{t}$$

Por lo que respecta a $D(t)$:

1. Nacemos y morimos con nula capacidad de decisión ($D(0)=D(a)=0$).
2. Hacia la mitad de la vida, cénit de la madurez, la capacidad de decisión es máxima ($D'(a/2)=0, D''(a/2)<0$).
3. Si n es el valor de ése máximo, es decir, el mayor número de futuros a considerar y sobre los que podemos decidir, entonces: $D(a/2)=n$.
4. Tanto el aumento de la capacidad de decisión tras el nacimiento como su mengua previa a la muerte comienzan y acaban en 0: $D'(0)=D'(a)=0$.

Existe un polinomio que verifica esas premisas: $D(t) = \frac{16n}{a^4} t^2 (a-t)^2$

Si $a=80$ años y $n=4$, la capacidad de decisión está por encima de los futuros posibles en el intervalo $[26, 67]$, aproximadamente la del gráfico. ■



Diseño y maquetación FMC

Miquel Albertí Palmer
 ciudadesinvisibles@revistasuma.es



Maurilia ∞

La Maurilia M_n del instante n es distinta de su sucesora M_{n+1} . Comparten únicamente el nombre y el lugar en el que se desarrollan formando una sucesión disjunta, cada uno de sus términos abarcando a lo sumo tres o cuatro generaciones:

$$M_i \cap M_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

Una ciudad acorde con la idea de las Matemáticas que tenía Poincaré, para quien consistían en *dar el mismo nombre a cosas diferentes*. Un guante, un pañuelo, una canica, un folio, una cuerda, un calcetín, todos son homeomorfos a un punto.

Pero no es necesario ir al ámbito topológico para ver que cosas de apariencia distinta tienen fondos comunes. Bajo el mismo nombre de *número* se han sucedido a lo largo de la Historia multitud de concepciones distintas de la cantidad.

En eso Maurilia se distingue del mundo matemático. Cierto es que no hay ninguna relación entre las personas que tienen las ideas y que han hecho que el *número* se desarrollase, pero aunque nuestros abuelos pitagóricos no lograsen digerir los irracionales ni imaginar siquiera los complejos, y a pesar de que, generación tras generación, los niños siguen encontrando dificultades para asimilar los enteros, la relación entre ellos no puede ser más sólida:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$$

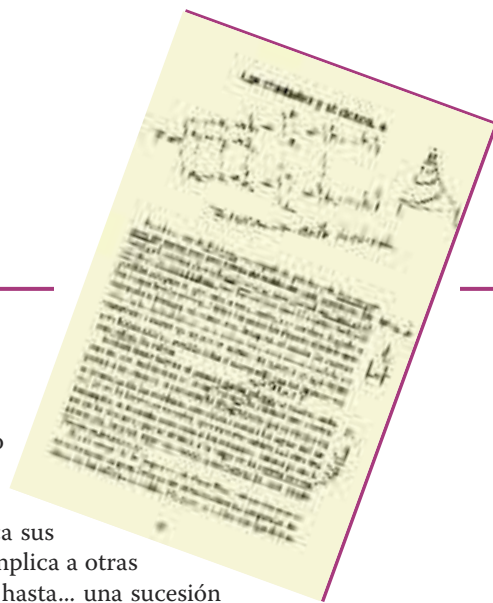
No es el tiempo lo que determina ese orden, sino su capacidad. Los números situados más a la derecha resuelven problemas irresolubles para los que están a su izquierda aunque éstos les sirvieron de base. ■

...ciudades diferentes se suceden sobre el mismo suelo y bajo el mismo nombre, ..., incomunicables entre sí.

Es inútil preguntarse si éstos son mejores o peores que los antiguos, dado que no existe entre ellos ninguna relación, (...)

La incomunicación entre Maurilias sucesivas imposibilita su progreso confundiéndolo con el cambio.

Fedora Fedora



(...), hay un palacio de metal con una esfera de vidrio en cada aposento. Mirando el interior de cada esfera se ve una ciudad azul que es el modelo de otra Fedora.

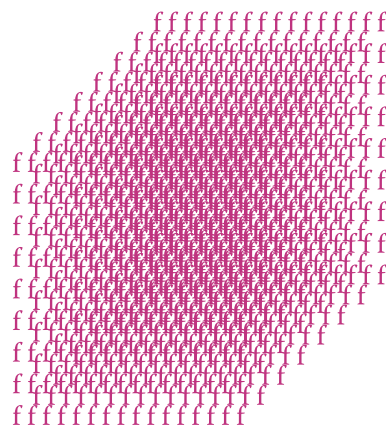
Caracterizándose Fedora por tener un palacio de las esferas cabe suponer que también las fedoras envidriadas lo poseen, lo que desata la recurrencia. La primera Fedora (F) implica sus representaciones (F⇒f), cada una de éstas implica a otras fedoras a su vez (f⇒f), y así sucesivamente, hasta... una sucesión ilimitada de fedoras:

$$[F \Rightarrow f] \Rightarrow [f \Rightarrow f] \Rightarrow [F \Rightarrow f, f, f, \dots]$$

Esta capacidad iguala el carácter existencial de la primera ciudad con el de las demás, por lo que absolutamente todas comparten el mismo grado de ficción o realidad, algo que de haber pasado por alto la interpretación recurrente quedaría más en entredicho. Lógico es, por tanto, que esa configuración *autoinclusiva* sólo tenga sentido considerando que todas ellas son, como dice Marco Polo, *supuestas*.

En el mapa de tu gran imperio, oh Gran Jan, deben encontrar su sitio tanto la gran Fedora de piedra como las pequeñas Fedoras de las esferas de vidrio. No porque todas sean igualmente reales, sino porque todas son sólo supuestas.

La primera Fedora no se distingue de sus reproducciones. Es tan virtual como ellas. Un mapa que registre la primera debe registrar también aquellas que poseen su naturaleza. El mapa las iguala. ■



Fedora: encerrada en sí misma hasta la saciedad.

Zoe

Crear esa ciudad de diferencias no supone tanto esfuerzo como uno se imagina, ya que no es necesario visitar todos los posibles pares de ciudades para establecer las diferencias. De hecho, de las diferencias entre ciudades consecutivas se desprenden todas las demás. Si c_1 , c_2 , c_3 , y c_4 son las ciudades visitadas, conociendo tres diferencias $c_1 - c_2 = a$, $c_2 - c_3 = b$, $c_3 - c_4 = c$, se obtienen las restantes:

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 &= a \\ c_1 - c_3 &= a + b \\ c_2 - c_3 &= b & c_1 - c_4 &= a + b + c \\ c_2 - c_4 &= b + c \\ c_3 - c_4 &= c \end{aligned}$$

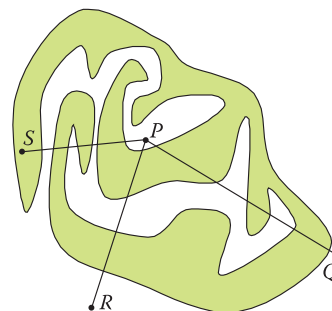
Las otras diferencias se hallan sumando las tres primeras ya conocidas. Lo mismo vale para más de cuatro.

La pregunta puede interpretarse de varias formas. ¿Se refiere a la existencia de tal línea? ¿Quizá a qué línea concreta de una serie de líneas? ¿O tal vez al carácter de la línea ya existente?

Cada hombre lleva en su mente una ciudad hecha sólo de diferencias...

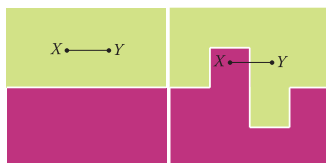
¿Qué línea separa el dentro del fuera...?

La frontera de un recinto bidimensional conexo suele ser una curva tradicional continua y cerrada. El teorema de Jordan dice que una curva semejante que no se corte a sí misma divide el plano en dos regiones disjuntas y conexas. Una es acotada –llamada interior–, y la otra no es acotada –llamada exterior. Decidir si un punto determinado pertenece a una región o a la otra depende de si es par o impar el número de cortes (intersecciones no tangenciales) de un segmento que una el punto dónde nos hallamos con un punto cualquiera de la región exterior. En la figura de la derecha el punto P se halla en el exterior de la curva porque el segmento PQ la corta un número par de veces: seis. Igual sucede con PR , que la corta en cuatro ocasiones. En cambio S está dentro porque el segmento PS corta la curva siete veces.

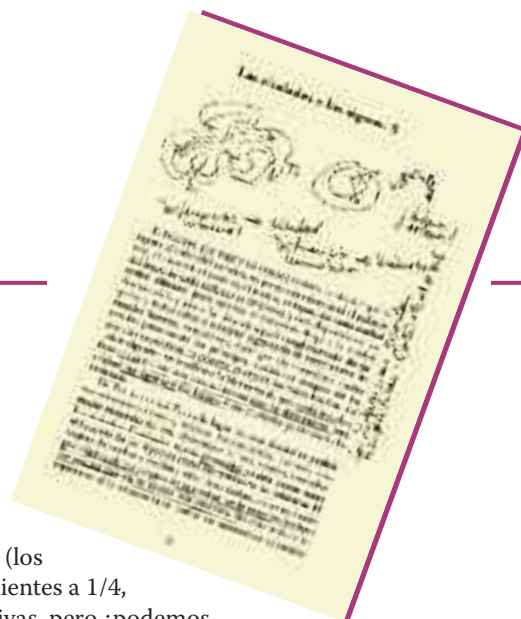


Pero determinar el número de intersecciones puede ser difícil. En el caso de una curva fractal las intersecciones pueden ser infinitas, como en la frontera del conjunto de Mandelbrot. Además, de esas curvas no se puede tener una imagen completa y definitiva, ya que son curvas recurrentes en las que cualquier representación, por muy afinada que sea, es sólo un estadio de los infinitos que se necesitan para completarla. No se pueden contar los cortes y debemos basarnos en su expresión analítica para ver si un punto verifica o no la descripción correspondiente.

Σ90



Por ejemplo, en una orilla semejante a una versión de la curva de von Koch (véase la figura de la izquierda), podemos asegurar que los cinco puntos que dividen en cuatro partes cada segmento (los extremos 0 y 1, y los interiores correspondientes a $1/4$, $2/4$ y $3/4$) estarán en todas las orillas sucesivas, pero ¿podemos asegurar que los puntos X e Y que al principio flotan en el agua estarán al final de la iteración en la orilla? Sólo podemos saberlo si conocemos su posición exacta, sus coordenadas, y averiguar si acabarán siendo capturados por el proceso recursivo que traza la curva.



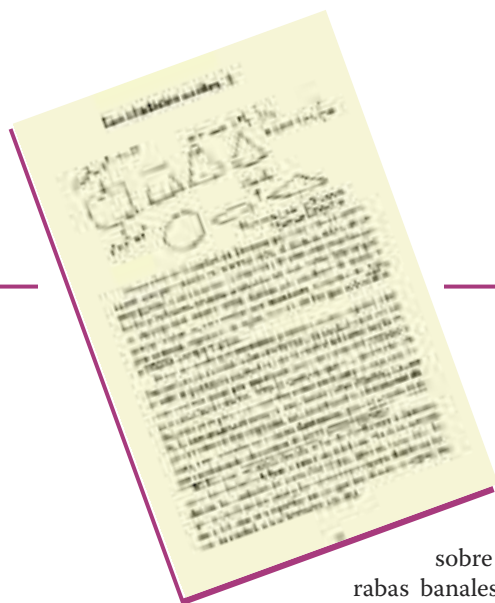
¿Cuál es la línea que separa el dentro del fuera?

¿Qué línea separa el dentro del fuera, el estruendo de las ruedas del aullido de los lobos?

La otra dificultad no está en la topología de la curva, sino en saber cuál de una serie de líneas es la que separa el dentro del fuera, como en la foto del margen.

Calvino acaba por aclararnos las dudas. Los carros y su ruido pertenecen a la ciudad, están dentro de ella. El aullido de los lobos pertenece al exterior, está fuera de Zoe. Pero entre el lugar en el que únicamente se oye aullar a los lobos y el lugar en el que sólo se escuchan los carros hay una franja en la que ambos sonidos penetran nuestros oídos. ¿Estamos dentro o estamos fuera de Zoe? No hay línea divisoria, sino una franja confusa y oscilante. No siempre son los mismos lobos ni los mismos carros. Ni los mismos lugares ni las mismas horas. Un punto por el que pasaste ayer y que era exterior porque sólo oíste a los lobos, hoy es interior porque sólo escuchas el rodar de los carros. Estamos en la tercera dificultad. No existe una línea que separa el dentro del fuera, sino una zona difusa y variable de perfiles imprecisos como los de una nube o como el vaivén del oleaje en la orilla. ■

El interior y exterior de Zoe están separados por una franja de límites invisibles, pero audibles.



Zenobia Σ

En Zenobia te sorprendes de ti mismo cuando al levantar la vista te quedas embelesado por el vértice culminante de un techo. Mirando a lo alto reflexionas sobre cuestiones que hasta ese momento considerabas banales, pero que ahora no puedes quitarte de la cabeza. Te das cuenta de que el cono hueco divide el espacio tridimensional en dos semiespacios, uno cóncavo y otro convexo, y de que el punto en el que termina certifica una paradoja. Pese a ser finito y limitado, el cono propone un punto como límite de las sucesivas circunferencias de nivel que lo conforman. Es el cierre del cono. Pero eso ocurre sin que dicho vértice sea topológicamente isomorfo a ninguno de los anillos circulares de los que es límite.

También piensas en el techo cónico como límite de una serie de cilindros huecos y abiertos cuya circunferencia superior se estrecha hasta colapsar en un punto. Tampoco ahí hay equivalencia topológica. Pero un instante después caes en la cuenta de que sustituyendo la circunferencia por un círculo, es decir, cubriendo su agujero superior, el límite puntual sí es isomorfo a cada uno de los discos que se le aproximan.

Otra opción es hacer girar un segmento inclinado alrededor del eje vertical definido por su extremo más elevado. Y todavía se te ocurre otra. Obtener el cono pellizcando el centro de un disco e izándolo hasta la altura deseada, añadiéndole una dimensión.

Este isomorfismo topológico entre el disco D de radio 1 y su cono hueco Ch de altura 1:

$$D = \{(r \cos \alpha, r \sin \alpha, 0) \in \mathbf{R}^3 \mid \alpha \in [0, 2\pi], r \in [0, 1]\} \quad Ch = \{(r \cos \alpha, r \sin \alpha, 1-r) \in \mathbf{R}^3 \mid \alpha \in [0, 2\pi], r \in [0, 1]\}$$

te satisface hasta el punto de preguntarte cuál de todas esas formas de pensamiento refleja con mayor fidelidad la realidad de los techos cónicos de Zenobia.

Marco Polo te da la respuesta. Si Zenobia se levanta del suelo con altos pilotes, es decir, con segmentos verticales, es izando el centro del disco como hay que interpretar el cono. ■



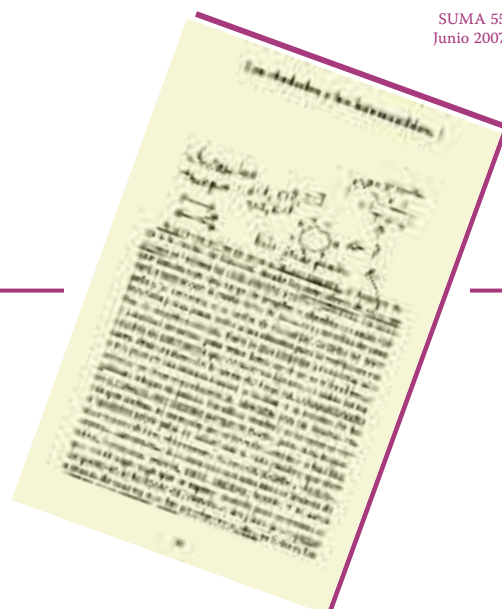
(...), coronadas por miradores de techos cónicos, (...)

(...), se levanta sobre altísimos pilotes, (...)

Zenobia: ciudad de isomorfismos circulares.

EUFEMIA

Eufemia



A ochenta millas, de proa al viento maestral, el hombre llega a la ciudad de Eufemia, donde los mercaderes de siete naciones se reúnen (...)

No sólo a vender y a comprar se viene a Eufemia (...), la ciudad donde en cada solsticio y en cada equinoccio intercambiamos nuestros recuerdos.

El viento maestral sopla del noroeste. Puesto que la proa se le opone, las componentes del sentido y dirección de la navegación son, tomando la milla como unidad, $(-80/\sqrt{2}, 80/\sqrt{2})$.

Al ser siete los mercaderes no pueden llevar solamente un producto cada uno porque el intercambio no sería posible (si nadie quiere irse de vacío). Lo lógico es que cada mercader traiga consigo varios productos que le faciliten el intercambio y el regateo.

El trueque es primordial en Eufemia, pero no lo único. La ventaja de los recuerdos sobre las mercancías es que ni pesan ni ocupan lugar alguno y que el relato que uno cuenta se lo llevan todos aquellos que lo escuchan.

A diferencia de lo que ocurre con los productos comerciales en los que el precio o el trueque se establece en base a una relación proporcional acordada, como 1:1, 1:2 o 2:3, el intercambio de relatos es gratuito y las únicas reglas a obedecer son disponer de uno, contarlos y escuchar los de los demás. La relación es la misma para todos los del corro, 1:n. Y puesto que $n \cdot (1:n) = 1$, el trueque es justo y se duerme en paz.

Este es ya el juego de las permutaciones, no sólo el del intercambio. Los recuerdos no se borran. ■



Eufemia, donde el trueque esencial destaca que $n \cdot (1:n) = 1$.

diálogo entre Marco Polo y Kublai Jan

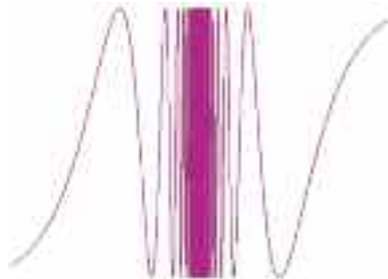
διαλόγος εντρε Μαρκο Πολο λ Κιμπλαϊ Ταν

Este es el esfuerzo exigible y que debe llevar a cabo el que aprende. Interpretar palabras, símbolos y objetos que articulados de forma, en órdenes distintos y en contextos diferentes generan nuevos conceptos y significados.

Topamos con la filosofía taoísta que ve en el vacío circundante la esencia de las cosas: *Modelando el barro se hacen las vasijas, y es de su vacío del que depende la utilidad de las vasijas de barro (Zi, 1983, p. 111)**. El Tao sitúa la utilidad de algo en su complementario. Hay que prestar atención no sólo a la parte tangible de las palabras, su sonido y significado, sino a su complementario, el silencio y la reflexión.

Colmando los intervalos silenciosos de un discurso con elaboraciones propias de las ideas que transmite, lejos de perdernos, construimos conocimiento: aprendemos.

Pensar con palabras y articularlas lógicamente distingue el pensamiento y conocimiento racional del irracional. No hay gestos, objetos ni imágenes capaces de describir con suficiente claridad lo que ocurre en el punto $x=0$ de la curva $y=\text{sen}(1/x)$:



Solamente las palabras y la argumentación tienen ese poder:

$$\exists a \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow 0} \text{sen} \frac{1}{x} = a$$

* Zi, Lao (1983): *El libro del Tao*, Edición Bilingüe, traducción, prólogo y notas de Juan Ignacio Preciado, Alfabeta, Madrid.

No siempre las conexiones entre un elemento y otro del relato eran evidentes para el emperador; los objetos podían querer decir cosas diferentes: (...)

(...) lo que hacía precioso para Kublai cada hecho o noticia (...) era el espacio que quedaba en torno, un vacío no colmado de palabras. Las descripciones (...) tenían esa virtud: que se podía dar vueltas con el pensamiento entre ellas, perderse (...)

(...) es cierto que las palabras servían mejor que los objetos y los gestos para catalogar las cosas más importantes (...)