

**H**ace por estas fechas 300 años, exactamente el 15 de abril de 1707, nació Leonhard Euler, en la ciudad suiza de Basilea, cuya universidad había alcanzado un gran prestigio, impulsada por una sociedad vivamente interesada por entonces en la educación científica y artística.

El padre de Leonhard, Paul, Pastor calvinista, era un hombre de amplia cultura que había estudiado matemáticas con Jacob Bernoulli, lo que le permitió ayudar a su hijo a dar los primeros pasos en Matemáticas. La madre, Margarete, procedía de una antigua familia de eruditos. Así se comprende, en semejante ambiente familiar, la favorable disposición de Leonhard hacia el estudio en general, cualquiera que fuese la materia.

*Leonhard fue un verdadero niño prodigio y no sólo para las matemáticas, pues tenía un don especial para los idiomas y destacaba en todos los estudios que realizaba.*

Leonhard fue un verdadero niño prodigio y no sólo para las matemáticas, pues tenía un don especial para los idiomas y destacaba en todos los estudios que realizaba. Su prodigiosa memoria y su capacidad mental para el cálculo le permitían realizar complicados cálculos aritméticos sin necesidad de utilizar para ello papel y lápiz.

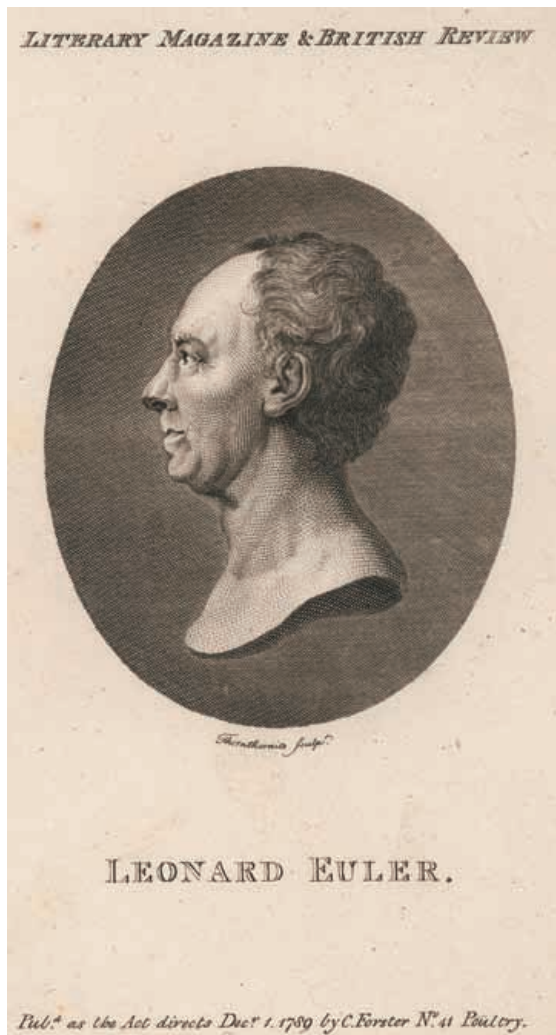


Grabado de Dupin

Santiago Gutiérrez  
hace.suma@fespm.org

Su padre le orientó hacia los estudios de Filosofía y Teología, con la idea de seguir los pasos paternos y hacerse Pastor de la iglesia calvinista. A tal efecto, con tan solo trece años, matriculó a su hijo en la Facultad de Filosofía y más tarde en la de Teología. Mientras tanto, había establecido relación, al entrar en la Universidad, con Johann Bernoulli, que iba a convertirse para el joven Leonhard, más que en un maestro, en un auténtico tutor, un guía, que le proponía lecturas matemáticas y discutía con él, posteriormente, las dificultades que iba encontrando. Como recordaba el propio Euler:

Tenía autorización para visitar con toda libertad (a Johann Bernoulli) los sábados por la tarde; él amablemente me explicaba todo aquello que yo no podía entender.



Grabado de J. Thornthwaite, n.1840

Al parecer Johann daba clases a Leonhard junto a sus hijos Niklaus y Daniel, con los que Euler acabó estableciendo una gran amistad. Con el transcurso de los años, los avances de Euler en el análisis eran tan grandes que el propio Johann Bernoulli llegó a escribirle:

Yo represento el análisis superior como si estuviera en su infancia, pero tú lo estás llevando a su estado adulto.

Al estudio de las matemáticas, la filosofía y la teología añadía Euler el de la medicina, la astronomía, la física y las lenguas orientales. Esta gran amplitud de conocimientos le favorecía a la hora de intentar acceder a una gran diversidad de cátedras en cualquier Universidad. Así, con 19 años, se presentó a una cátedra de Física en la Universidad de Basilea, con una disertación sobre la naturaleza del sonido, siendo rechazado por la única razón de su extremada juventud.

### El primer período ruso

En 1727, enterado de que la Academia de San Petesburgo convocaba una plaza de Medicina, se dirigió a Rusia a reunirse con su amigo Daniel Bernoulli, que había acudido a San Petesburgo junto con su hermano Niklaus, dos años antes, para ejercer ambos como profesores de la Academia, con la desgracia de que el joven Niklaus se había muerto un año después, víctima de los rigores del clima. Al llegar a San Petesburgo, se encontró Euler con que le habían cambiado su destino, afortunadamente para él, y en lugar de Fisiología iba a enseñar Física.

En 1733, su amigo Daniel, en cuya casa había residido los primeros años de su estancia en Rusia, con el que había mantenido amplias discusiones de física y matemáticas, regresó a su ciudad natal para ocupar la cátedra de Matemáticas de la Universidad de Basilea. Esto produjo un gran vacío en la vida de Euler, pero por otro lado tuvo la ventaja de dejar vacante la plaza de Matemáticas que no tardaría en ser ocupada por el propio Euler.

Ese mismo año de 1733 se casaba Euler con Katharina Gsell, hija de un pintor suizo que había ido a San Petesburgo contratado por la Academia y que en aquel momento ostentaba el cargo de director. De su matrimonio tuvo Euler trece hijos de los cuales solo cinco alcanzaron la adolescencia, tres niños y dos niñas, y de estos solo tres sobrevivieron a sus padres.

Durante su estancia en San Petesburgo, Euler debía atender a sus tareas en la Academia y a los requerimientos como asesor del gobierno ruso, que le había nombrado director del Departamento de Geografía y comisario de pesas y medidas, y le había pedido que escribiera textos escolares para ser usados por los estudiantes de secundaria de las escuelas rusas. Para entonces ya había publicado más de ochenta trabajos en la revista de investigación de la Academia *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*. Precisamente su exceso de trabajo, además era cartógrafo de las vastas extensiones rusas, le llevó a contraer una enfermedad en la vista, a los 33 años, que acabó ocasionándole la pérdida de la visión de un ojo. La ceguera parcial no le impidió seguir trabajando con la misma intensidad. La pluma de Euler era tan activa y tan rápida que en cierta ocasión el científico francés F. Arago dijo de él que:

... su exceso de trabajo, también era cartógrafo de las vastas extensiones rusas, le llevó a contraer una enfermedad en la vista, a los 33 años, que acabó ocasionándole la pérdida de visión de un ojo.

A estas portentosas cualidades añadía una capacidad de concentración tal que era capaz de escribir sus memorias matemáticas incluso mientras sus hijos jugueteaban con él, subiéndosele por encima.

Grabado de Samuel Kuetner (1747-1828), dibujo de Joseph-Friedrich-Augus Darbes (1747-1810)



podía hacer matemáticas sin ningún esfuerzo, exactamente igual que los hombres respiran y que las águilas se mantienen en el aire.

A estas portentosas cualidades añadía una capacidad de concentración tal que era capaz de escribir sus memorias matemáticas incluso mientras sus hijos jugueteaban con él, subiéndosele por encima. El propio Euler decía que su lápiz parecía sobrepasarlo en inteligencia, dada la facilidad con que salían de él sus escritos. Durante este periodo, en 1736, publicó su tratado de *Mecánica*, famoso por ser el primero que basaba sus demostraciones en el nuevo análisis, ahorrándose así el recurso a las intrincadas demostraciones de los tratados anteriores.

En 1735, había logrado resolver el llamado *problema de Basilea*, que consistía en determinar el valor de la serie

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{k^2} + \dots$$

Este problema había sido planteado por P. Mengoli en 1644, y desde entonces fue pasando por diversos matemáticos, llegando intacto, sin solución, hasta incluso Jacob Bernoulli que decidió plantarlo a su vez a la comunidad matemática en 1689.

El primer intento de Euler fue atacarlo mediante las aproximaciones sucesivas de las sumas parciales, pero así logró tan solo una aproximación al valor de la serie, y no el valor exacto.

Se le ocurrió entonces abordarlo integrando de dos formas diferentes (1731) la expresión

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} -\frac{\ln(1-t)}{t} dt$$

La respuesta obtenida, tras un laborioso cálculo y de formulación bastante compleja, seguía dando una nueva aproximación, solo correcta en sus seis primeros decimales.



Billete de 10 francos suizos con la efigie de Euler

En 1735 da finalmente con la solución:

Sin embargo, he encontrado ahora y contra todo pronóstico una expresión elegante para la suma de la serie

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc}$$

que depende de la cuadratura del círculo... He encontrado que seis veces la suma de esta serie es igual al cuadrado de la longitud de la circunferencia de un círculo cuyo diámetro es 1.

Es decir:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

## El periodo alemán

La muerte de la emperatriz Ana en 1740 produjo en Rusia un cierto periodo de inseguridad a la cual no era ajena la Academia. Quizá por esto y temiendo que ello perjudicara sus condiciones de trabajo, en 1741 decidió aceptar la invitación del rey de Prusia, Federico II el Grande, para incorporarse a la Academia de Berlin, fundada en 1700 por Leibniz y presidida en aquel entonces por el francés P.L.M. de Maupertuis, e impulsada por el propio rey, que deseaba convertirla en un importante centro de Ciencia y de Cultura. Debido a las múltiples ausencias de Maupertuis, de hecho, era Euler quien dirigía todo el trabajo de la Academia. El rey le encomendaba a Euler tareas muy variadas, como la nivelación del canal Finow, la instalación de juegos de agua en Sanssouci (que

... podía hacer matemáticas sin ningún esfuerzo “exactamente igual que los hombres respiran y que las águilas se mantienen en el aire”.

nunca llegaron a funcionar), la dirección de las minas de sal de Schönebeck, la creación de montepíos de viudedad, los juegos de lotería... Para los trabajos de investigación, sin embargo, el rey no mostró interés alguno. A decir verdad, las relaciones de Federico II con Euler fueron muy frías, hasta el punto de que, muerto Maupertuis, no fue capaz de promoverle al cargo de director de la Academia.

Euler continuó sus investigaciones con la misma intensidad que en la época rusa, realizando aportaciones esenciales a casi todas las ramas de las Matemáticas existentes hasta ese momento, y no solo a través de monografías o artículos en revistas, sino a través de extensos tratados. Por otra parte y durante este periodo de su estancia en Berlin no dejó de enviar numerosas memorias tanto a la Academia de Prusia como a la de San Petesburgo, de la cual continuaba recibiendo una pensión.

El número e lo utiliza por primera vez en una carta dirigida a Goldbach, en 1731, para designar “el número cuyo logaritmo hiperbólico es igual a uno.”

Además de sus *Cartas a una princesa de Alemania*, que recopila las lecciones impartidas a la princesa de Anhalt-Dessau, sobrina del rey de Prusia, obra de divulgación que mereció ser traducida a varios idiomas, Euler publicó trabajos de mucha importancia durante este periodo:

- En 1744, su *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, el primer estudio general sobre el Cálculo de Variaciones, según los conocimientos de entonces.
- En 1748, aparece la *Introductio in analysis infinitorum*, en dos volúmenes, una introducción al análisis de las magnitudes infinitamente pequeñas. Es la más famosa de sus obras, y en ella se encuentran las célebres fórmulas que relacionan las funciones trigonométricas y la exponencial, expresiones del seno y el coseno como productos infinitos, la geometría analítica en tres dimensiones, teoremas relativos a las curvas algebraicas, etc. Por otra parte, es aquí donde Euler define el concepto de función como el de una

expresión analítica formada por variables y constantes, y según la naturaleza de esa expresión llamó a la función algebraica o trascendente. Así mismo efectuó la clasificación de las funciones en uniformes y multiformes, pares e impares, explícitas e implícitas, algebraicas racionales y algebraicas irracionales.

- En 1755 las *Institutiones calculi differentialis*. En esta obra adopta el principio de Leibniz de despreciar las cantidades infinitamente pequeñas en la idea de que una cualquiera de ellas es menor que las precedentes y por tanto no puede especificarse su valor que es cero.



- En 1761 publica los *Teoremas sobre los residuos obtenidos por la división de las potencias*, donde aparece demostrado el llamado pequeño teorema de Fermat (si  $p$  es primo,  $a^p - p$  es divisible por  $p$ ), en que aborda problemas sobre teoría de números utilizando el método de Inducción.



- Es sabido la importancia que tiene la notación simbólica para el mejor y más rápido desarrollo de las matemáticas. Pues a Euler se debe la introducción de algunos de los símbolos que usamos aun hoy. Así, el número  $e$  que utiliza por primera vez en una carta dirigida a Goldbach, en 1731, para designar *el número cuyo logaritmo hiperbólico es igual a uno*. En cuanto a la letra  $\pi$ , para representar la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, si bien había sido utilizada ya en 1706 por William Jones en su *Sinopsis Palmariorum Matheseos* (Nueva introducción a la Matemática), es la adopción que Euler hace de ella lo que consigue extender definitivamente su uso entre los matemáticos. La letra  $i$ , en principio la empleaba Euler como símbolo de un *número infinito*, pero la adoptó en 1777, ya

al final de su vida, para designar la raíz cuadrada de  $-1$ , si bien no apareció publicada hasta 1794, y su difusión definitiva no se logró hasta su utilización por Gauss en las *Disquisitiones arithmeticae*, de 1801. Debemos a Euler también la designación de los lados de un triángulo mediante las letras minúsculas  $a, b$  y  $c$ , y la de los ángulos opuestos mediante las mayúsculas  $A, B$  y  $C$ , respectivamente, así como el uso de las letras  $r, R$  y  $s$  para designar, respectivamente, los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita, y el semiperímetro de un triángulo. Otros símbolos suyos son:  $Lx$  para el logaritmo natural de  $x$ , el

*Debemos a Euler también la designación de los lados de un triángulo mediante las letras minúsculas  $a, b$  y  $c$ , y la de los ángulos opuestos mediante las mayúsculas  $A, B$  y  $C$ , respectivamente.*

símbolo  $\Sigma$  para el sumatorio, el símbolo  $f(x)$  para una función, y las abreviaturas *sen, cos, tg, cotg, sec* y *cosc* para las funciones trigonométricas.

- En sus investigaciones sobre los números complejos llegó a la conocida hoy como identidad de Euler:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

De ella dedujo, haciendo  $\theta = \pi$ , la célebre relación entre las famosas tres constantes de la matemática:

$$e^{i\pi} = -1$$

## Segundo periodo ruso

En 1766, Euler recibe la invitación de Catalina II de Rusia para volver a la Academia de San Petesburgo, poniendo a su disposición una casa bien amueblada (todavía viven sus trece hijos), dándole toda clase de facilidades y los honores de gran personalidad. A poco de llegar de nuevo a Rusia, su visión se deterioró hasta el punto de tener que utilizar una pizarra para escribir y realizar sus cálculos. Prácticamente permanecería ciego el resto de su vida. No obstante la ceguera, su producción siguió siendo tan fecunda como en los periodos anteriores.

Entre 1768 y 1770 aparecieron las *Institutiones calculi integralis*, en tres tomos, que completaban sus trabajos de análisis con el cálculo integral. Esta obra, junto a las *Institutiones cal-*

*culi differentialis*, además de recoger todos los trabajos acumulados sobre el tema hasta la fecha, introduce numerosas aportaciones personales, como las formas habituales de las integrales elípticas, una teoría de las funciones beta y gamma fundada en las integrales eulerianas, un desarrollo del cálculo con diferencias finitas, y métodos sistemáticos de resolución de ecuaciones diferenciales de orden superior de coeficientes constantes.

En 1770, redactó un manual de Álgebra en lengua alemana, que se publicó bajo el título de *Tratado completo de Álgebra*. Como quiera que ya había perdido la visión de ambos ojos, este libro lo dictó a uno de sus colaboradores, un ex-sastre, y, por cierto, modificaba el texto una y otra vez hasta quedar convencido de que su escribano podía entenderlo.

Algunos otros trabajos contienen auténticas joyitas como el teorema de Euler sobre los poliedros, o la *Theoria motuum planetarum et cometarum* (Teoría de los movimientos de los planetas y los cometas, 1744), que sirvió para los cálculos astronómicos hasta bien entrado el siglo XIX.



Grabado de Benjamin Holl (1808-1884), de un dibujo de A. Lorgna

En 1771, el fuego destruyó totalmente su casa, salvándose él del fuego gracias a su servidor Pierre Grimmon que lo sacó a hombros del incendio. Afortunadamente pudieron salvarse todos sus manuscritos y una vez más la actuación de la emperatriz Catalina remedió la situación.

En 1773, Euler perdió a su mujer Catherina, volviendo a casarse al año siguiente con Salomé Abigail Gsell, hermanastra de la difunta, que le proporcionó las atenciones necesarias hasta su muerte.



En todas las ramas de las matemáticas podemos encontrar el nombre de Euler junto a sus importantes contribuciones. Sus obras completas, se hallaban en proceso de publicación en el último cuarto del siglo pasado. Se calculaba que ocuparían unos 75 volúmenes, en los que se reunirían cerca de 900 trabajos, memorias y libros pertenecientes al dominio científico, lo que equivaldría a una producción anual de unas 800 páginas, a lo largo de su vida profesional. Euler iluminó el siglo XVIII con sus trabajos y su sabiduría. En los comienzos del siglo, morían Leibniz y Newton, y en el final Gauss y Lobachevskiy eran casi unos niños. Se entiende lo que Laplace solía decir a sus discípulos: *Leed a Euler, leed a Euler...*

En 1783, el día 18 de septiembre de nuestro calendario, después de haber jugado un rato con sus nietos, de haber trabajado sobre el vuelo de los globos (era un tema de interés, dado el reciente ascenso en globo de los hermanos Montgolfier), tras una breve comida y haber hecho unos cálculos sobre la órbita del planeta Urano, a media tarde, Euler, ese gran matemático y excelente persona, fue víctima de una hemorragia masiva que le provocó la muerte casi instantánea. En su elogio fúnebre, el marqués de Condorcet, tras señalar que Euler *dejó de calcular y vivir*, afirmó que *todos los matemáticos... son sus discípulos*. ■