

Lobachevskiy: El Copérnico de la geometría

HACE 150 años, el 12 de febrero de 1856 del calendario juliano, moría en la ciudad rusa de Kazán, a la edad de 63 años, Nikolai Ivanovich Lobachevskiy. Escasamente reconocido en vida, a su muerte, sin embargo, llegó a ser considerado como el *Copérnico de la Geometría*, según la propuesta del matemático Clifford (1845–1879).

¿A qué fue debido tan extraordinario título a su favor?

Su vida

Poco se sabe de la vida de Nikolai Ivanovich Lobachevskiy. Nació el 1 de diciembre de 1792 en la localidad rusa de Nizhniy -Novgorod, actualmente Gorki. Su padre, Iván M. Lobacheskiy trabajaba como funcionario en una oficina dedicada a la inspección de tierras, su madre Praskovia Aleksándova, persona inteligente y de carácter enérgico, se había dedicado enteramente a su familia, especialmente a los tres hijos del matrimonio.



Busto de Lobachevskiy, en Moscú

Nikolai Lobachevskiy era el tercero de los hermanos y solo tenía cinco años cuando fue abandonado por su padre, decidiendo la madre regresar con sus hijos a casa de los abuelos. Dos años después, en 1800, fallecía el padre de Nikolai y ese mismo año su madre se trasladaría a la ciudad de Kazán, que ofrecía mejores y mayores posibilidades para el desarrollo intelectual y profesional de sus hijos. Precisamente, en 1800, se inauguraba un centro educativo de nivel superior, el Gimnasium, único centro oficial no religioso de Kazán. En noviembre de 1802 Praskovia Aleksándova solicitó y obtuvo la admisión de sus hijos en el Gimnasium, no sin antes haber superado éstos unos severos exámenes.

Santiago Gutiérrez
hace.suma@fespm.org

En el Gimnasium, Nicolai tuvo la suerte de encontrar al joven y entusiasta profesor de matemáticas Kartashevski, que utilizaba para la preparación de sus clases obras de matemáticos célebres de la época, y en especial los *Eléments de géométrie*, del matemático francés Legendre (1752-1833), publicado en el año 1794. Este autor habría de ejercer una gran influencia en los escritos geométricos de Lobachevskiy.

Cuando aún no había cumplido los quince años, en 1807, Nikolai Lobachevskiy, acababa sus estudios brillantemente en el Gimnasium y podía ya leer entonces escritos científicos en francés, alemán y latín. A continuación, comenzaba sus estudios en la recién inaugurada universidad de Kazán, fundada en 1804, bajo el impulso del emperador Alejandro I, pero que no había iniciado sus actividades hasta el año siguiente.

En el año 1808, se incorporaba a la cátedra de matemáticas de la universidad el profesor alemán M.F. Bartels (1769-1833), que además de buen matemático era un excelente pedagogo. Bartels era aquel célebre joven profesor en prácticas al que el maestro Büttner había confiado el aprendizaje del niño de diez años F. Gauss en la escuela de Brunswick. No sería de extrañar que Bartels conociera el interés de Gauss por la cuestión del quinto postulado de Euclides y de alguna manera transmitiera este interés en sus clases al propio Lobachevski.

El año 1811, Lobachevskiy recibía el título de Licenciado en Física y Matemáticas. Con la mayoría de notas sobresalientes, y sin haber cumplido aún los 19 años, era invitado a quedarse en la propia Universidad de Kazán.

El año 1811, Lobachevskiy recibía el título de Licenciado en Física y Matemáticas. Con la mayoría de notas sobresalientes, y sin haber cumplido aún los 19 años, era invitado a quedarse en la propia Universidad de Kazán. Con 21 años, recibía el nombramiento de profesor adjunto de Física y Matemáticas, al tiempo que el profesor Bartels era elegido decano de su facultad.

Con este nombramiento, Lobachevskiy se veía obligado a impartir cursos y conferencias sobre materias tan variadas

como Aritmética, Teoría de Números, Álgebra, Geometría, Trigonometría, y Cálculo, y ello tanto a sus alumnos como a maestros y funcionarios. En julio de 1816, a la edad de 24 años, por petición expresa del profesor Bartels, fue nombrado profesor extraordinario de la Universidad. Una de las primeras tareas que se le encomendaron fue la de ordenar la biblioteca central de la Universidad (1819), que disponía de miles de libros, entre manuscritos y códices, pero muy desordenados.

El deterioro de la vida intelectual en el Imperio Ruso llevaría al profesor Bartels, en el año 1820, a aceptar una oferta de la Universidad de Dorpat. De este modo, quedaba vacante el puesto de Decano de la Facultad de Física y Matemática y para cubrirlo era nombrado Lobachevskiy, a pesar de ser sólo profesor extraordinario. Lobachevskiy se convirtió así en el personaje central de su Facultad. A partir de este momento:

- se le nombró miembro del comité de construcción de los edificios universitarios, labor que consistía en poner en marcha las diversas construcciones que se erigieron por esa época en la Universidad.
- organizó el laboratorio de Física.
- participó en el proyecto de construcción de un observatorio astronómico, que posteriormente él mismo utilizaría.
- fue nombrado redactor de una revista surgida en la Universidad y que posteriormente se denominó *Memorias de la Universidad de Kazán*.
- formó parte del comité encargado de dirigir la actividad docente de todos los centros educativos del distrito de Kazán.

En 1822 es nombrado catedrático de la Universidad. A pesar de tantas tareas administrativas Lobachevskiy siguió con sus matemáticas, impartiendo clases, estudiando, investigando, escribiendo, etc.

El año 1827, cuando aún no había cumplido los 34 años, era elegido rector de la Universidad de Kazán, cargo que ocuparía de manera ininterrumpida durante 19 años. Tan prolongada etapa como rector da idea del buen trabajo que realizó así como de la aceptación que disfrutó tanto por parte de los profesores como de los alumnos.

A punto de cumplir los 40 años, el año 1832, Lobachevskiy contrajo matrimonio con Varvara A. Moiséeva, mujer bastante más joven que él, perteneciente a una acomodada familia de Kazán, y con la que tuvo siete hijos.

El año 1846, cuando llevaba 30 años de servicio como profesor Lobachevskiy, al parecer, se vio obligado a jubilarse y dejar la Universidad. Coincidiendo con ello, cae gravemente enferma su mujer. Poco después su hijo mayor, el preferido, muere de tuberculosis.

Esta serie de desgracias, unidas al hecho de que estaba quedándose ciego, debido a una precoz esclerosis, debilitaron sensiblemente su salud, y, abandonado por los compañeros y colegas, incomprendido y enfermo, Lobachevskiy falleció en Kazán el 12 de febrero de 1856.

Su obra no geométrica

A pesar de haber dedicado gran parte de sus energías a tareas administrativas de la Universidad, Lobachevskiy no dejó de investigar en los más diversos campos de la matemática. Resultado de ello son trabajos como los siguientes:

- *Acerca de la convergencia de las series trigonométricas*, 1834.
- *El álgebra o el cálculo de los finitos*, 1834.
- *Sur la probabilité des resultats moyens, tirés des observations répétées*, 1842.
- *Acerca de los valores de algunas integrales definidas*, 1852.

En una memoria sobre la convergencia de las series geométricas define así el concepto de función: Como función de una variable se entiende una magnitud cuyo valor depende de esa variable. Es la primera vez en la historia de las matemáticas que aparece definida la idea de función sin necesidad de relacionarla con fórmulas o gráficas, como hasta entonces se hacía.

De todos estos trabajos es su *Álgebra* el texto por el que era más conocido en vida. Seguramente lo había escrito inspirado en los textos de los matemáticos más importantes del momento, que había leído por sugerencia del profesor Bartels, entre ellos la *Teoría de números* de Legendre y las *Disquisiciones aritméticas* de Gauss.

En una memoria sobre la convergencia de las series geométricas define así el concepto de función:

Como función de una variable se entiende una magnitud cuyo valor depende de esa variable

Es la primera vez en la historia de las matemáticas que aparece definida la idea de función sin necesidad de relacionarla con fórmulas o gráficas, como hasta entonces se hacía.

Sin embargo, no fue por sus escritos de Álgebra por lo que pasó a la historia Lobachevskiy. Son sus trabajos sobre Geometría los que hoy nos llevan a recordar su figura.



Sello emitido por Rusia en 1951, formando parte de una serie dedicada a sabios rusos

Su obra geométrica

Sus primeros escritos sobre esta materia son unos apuntes de clase titulados simplemente Geometría, que redactó en el verano de 1823, con la idea de ser publicados por la Universidad, a lo que ésta se negó por considerarlo poco ortodoxo. Y, en efecto, inspirado en las ideas de Legendre (*Elementos de Geometría*), Lobachevskiy ordenaba su exposición de la Geometría de modo excesivamente nuevo para la época en aquella pequeña Universidad de Kazán. Enfocaba el estudio de la geometría desde tres puntos de vista: medida de longitudes, medida de áreas y cálculo de volúmenes.

Construía los cinco primeros capítulos sin utilizar el quinto postulado de Euclides. Por primera vez en la historia se hacía esto de forma consciente. Lobachevskiy se daba cuenta de que la medida de los segmentos y de los ángulos no depende del quinto postulado, mientras que sí lo hace la medida de las áreas, razón por la cual retrasa lo más posible el cálculo de las áreas de figuras.

Sobre el quinto postulado de Euclides, afirmaba en estos pequeños apuntes que:

[...] no se ha descubierto hasta ahora ninguna demostración rigurosa de su verdad.

Después de ver rechazada la publicación de su Geometría, continuó Lobachevskiy investigando sobre el postulado de las paralelas, pero tomándolo en el sentido contrario, es decir, suponiendo que:

Por un punto P , exterior a una recta AB , pasa más de una paralela a AB , en el plano determinado por P y AB .

El quinto postulado y el problema de las paralelas

Para darse cuenta de la importancia del trabajo realizado por Lobachevskiy, conviene echar la mirada atrás y ver el camino recorrido.

En los *Elementos*, establece Euclides (ca. 300 a.C.), además de 23 definiciones y 9 nociones comunes, tan solo 5 postulados, y sobre este material construye todo el edificio de su Geometría que ocupará buena parte de los *Elementos*.

Los postulados dicen así:

Se pide:

1. Que de cualquier punto se pueda conducir una recta a todo otro punto.
2. Y que, toda recta limitada, se pueda prolongar indefinidamente por derecho (en su misma dirección).
3. Y que, con cualquier centro y cualquier distancia, se pueda describir un círculo.
4. Y que todos los ángulos rectos sean iguales entre sí.
5. Y que si una recta, cortando a otras dos, forma los ángulos internos a una misma parte, menores de dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán de la parte en que son los dos ángulos menores de dos rectos.

Ni que decir tiene que sorprendió a los matemáticos de todas las épocas, y aún nos sigue sorprendiendo hoy, la extensión y complejidad del quinto postulado si se compara con la brevedad y simplicidad de los otros cuatro. Este hecho dio lugar a múltiples intentos, a lo largo de la historia, de demostrar que este quinto postulado no era necesario como tal sino que se podría deducir de los otros.

Estos intentos se basaron en distintas estrategias, según la época. Básicamente, se pueden considerar las tres siguientes:

A. Sustituir el quinto postulado por otro equivalente pero más evidente y tratar de demostrar este otro a partir de los cuatro primeros

Este fue el primer intento conocido y ya lo había utilizado Proclo (411–485), comentarista de Euclides. Otros matemáticos eminentes intentaron algo parecido, como Legendre, Gauss, Wallis... pero el que cobró más fama y popularidad es el de Playfair (1795):

Por un punto exterior a una recta dada pasa una única recta paralela a ella.

Este enunciado, por su sencillez, se impuso de tal forma que sirvió de base, como se verá, para la creación de las geometrías no euclidianas.

Una segunda estrategia consistió en atacar el problema de frente, esto es:

B. Tratar de deducir el quinto postulado directamente a partir de los otros cuatro

Las demostraciones a que condujeron semejantes esfuerzos o fueron infructuosas, y no llegaron a su fin, o, si llegaron hasta un aparente final, adolecían de ciertos fallos que más temprano que tarde fueron saliendo a la luz.

A comienzos del siglo XVIII, aparece una nueva estrategia:

C. Demostrar la independencia del quinto postulado respecto de los anteriores por reducción al absurdo

Tal estrategia consistía en sustituir el contenido del quinto postulado por otro que diga lo contrario. Si se llegase a contradicción por este camino sería prueba evidente de que el quinto postulado, en su versión euclídea o en cualquier otra equivalente, depende realmente de los otros y podría por tanto abandonar su puesto como postulado para pasar al de proposición o teorema.

Con semejante estrategia abordaron el problema Saccheri, Lambert, Schweikart y Taurinus.

Estos matemáticos comenzaron por cambiar radicalmente el objetivo. En lugar de intentar demostrar que el quinto postulado es consecuencia de los otros, se proponían demostrar que es realmente independiente, o lo que es lo mismo, que las contradicciones aparecerían si se sustituía por el contrario.

Efectivamente, el primero de los citados y más interesante, el jesuita Saccheri (1667-1733), lleva a cabo su discurso, resultado de negar la afirmación del quinto postulado, y desarrolla su geometría en un librito con más de treinta proposiciones, deducidas con todo rigor a partir de su hipótesis. Al final, escribe:

Al fin he descubierto, en la hipótesis... una falsedad evidente, ya que necesariamente lleva a tener que admitir la existencia de dos rectas que, en el mismo punto (el de intersección) y en el mismo plano, tienen una perpendicular común.

Y esto,

[...] repugna a la naturaleza de la línea recta.

La geometría de Lobachevskiy

Después de ver rechazada la publicación, por parte de la Universidad, de su *Geometría*, continuó Lobachevskiy investigando sobre el postulado de las paralelas, a partir del enunciado de Playfair, pero tomándolo en el sentido contrario, es decir, suponiendo que:

Por un punto P , exterior a una recta AB , pasa más de una paralela a AB , en el plano determinado por P y AB .

Proposición tras proposición, construye así una extraña geometría, exenta de contradicciones si bien tan rara que él mismo denominó *Geometría imaginaria*.

Estamos en el año 1826. El día 11 de febrero, Lobachevskiy presenta su trabajo a los asistentes a una sesión de la facultad, con la siguiente carta de presentación:

Tengo el honor de presentar bajo el título de *Breve exposición de los principios de la geometría, con una demostración rigurosa del teorema de las paralelas*, un trabajo del que soy autor.

Deseo conocer la opinión de mis compañeros sobre él, y, si es favorable, solicito humildemente la publicación de mi trabajo en las memorias de la sección de Física y Matemáticas. He preferido escribir el trabajo en francés porque en ese idioma, ahora común a los hombres de ciencia, se ha contemplado editar las memorias.

Este trabajo no llegó a publicarse, sin embargo sabemos de su contenido gracias al artículo que el propio Lobachevskiy publicó, en la revista *El mensajero de Kazán*, con el título "Acerca de los principios de geometría", que incluía como parte importante su "Breve exposición..."

Podemos decir, en consecuencia, que el día 11 de febrero de 1826 nace, en la Universidad de Kazán, la geometría no euclidiana, ya que antes de esa fecha nadie había dado a conocer al mundo científico ningún escrito que desarrollara rigurosamente tal geometría y la admitiera como verdad matemática con todas sus consecuencias.

Lobachevskiy ganó a todos sus contemporáneos en dos aspectos, por una parte publicó su Geometría antes que ningún otro, y por otro lado tuvo el valor de enfrentarse a cuantos le criticaron y defender con tesón sus ideas en sucesivos escritos frente a todos ellos.

Es verdad que Sacheri y otros, como se ha citado, anduvieron cerca del descubrimiento, pero no supieron aceptar sus últimas conclusiones. Por su parte, Gauss sí había llegado, probablemente, lo bastante lejos como para poder reclamar la primogenitura del hallazgo, pero no publicó nada por miedo a mermar el prestigio de que gozaba entre sus contemporáneos, o, tal vez, por falta de seguridad en la validez de sus resultados. También J. Bolyai construyó un edificio semejante y por las mismas fechas, pero no lo publicó hasta 1832 y como opúsculo a un libro de su padre.

Lobachevskiy ganó a todos sus contemporáneos en dos aspectos, por una parte publicó su *Geometría* antes que ningún otro, y por otro lado tuvo el valor de enfrentarse a cuantos le criticaron y defender con tesón sus ideas en sucesivos escritos frente a todos ellos.

¿De dónde sacó Lobachevskiy tanta fuerza? Aparte de su indomable espíritu, hay que ver en su punto de vista una razón para llevar adelante semejante proyecto. Así, Saccheri, no se apartó

nunca del punto de vista euclidiano, seguía pensando en la recta como el objeto verificable en nuestro mundo cotidiano. Lobachevskiy, fue consecuente desde el comienzo, esto es, si se parte de que en el plano, por un punto exterior a una recta pasa más de una paralela a ella, esa recta y esas paralelas se desgajan ya del mundo de Euclides para convertirse en entes abstractos. Lobachevskiy revoluciona la geometría en tanto que hasta entonces era verificable en referencia a la Tierra que pisamos, mientras que él propone como referencia la lógica interna del sistema. Carece de sentido por tanto decir, en esta línea de trabajo, que un postulado, una conclusión o un teorema *repugnan a la naturaleza*. Con razón Clifford propuso considerarlo como el *Copérnico de la Geometría*.

En adelante, Lobachevskiy continuó sus investigaciones sobre los fundamentos de la Geometría que fue publicando en sucesivos artículos en la revista *Mensajero de Kazán*, bajo el título *Sobre los principios elementales de la Geometría*. Siguió en 1835 con su *Geometría imaginaria*. De 1836 a 1838 en los

Trabajos de los científicos de Kazán publicó *Aplicaciones de la Geometría imaginaria a algunas integrales*, y varios artículos bajo el título *Nuevos elementos de la Geometría, con una teoría completa de las líneas paralelas*.

En los últimos años de su vida, ya ciego, dictó una exposición completa de su Geometría con el título de *Pangeometría*, que fue publicada en ruso y en francés en 1855, solo un año antes de su muerte.

Los trabajos de Lobachevskiy (probablemente la *Geometría imaginaria*) llegaron a conocimiento de Gauss, quien se expresó en términos sumamente elogiosos, hasta el punto de quedar

deseoso de leer más de este ingenioso matemático

y le propuso en 1842 para ser nombrado miembro correspondiente de la Sociedad de Científicos de Gotinga, cosa que al parecer no llegó a saber nunca. ■



Sello emitido por Rusia en 1956, al cumplirse el centenario de la muerte de Lobachevskiy