

En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. Símbolo del anonimato científico (V)

Algunas pinceladas sobre combinatoria y didáctica

En esta visión comparativa de las aportaciones de Pascal tanto desde un punto de vista histórico como didáctico hemos ido desgranado las numerosas contribuciones y usos que, desde distintos enfoques y países, se han hecho de esta herramienta matemática. Habíamos hablado de cómo, en los umbrales del siglo XIV, Ibn al-Banna enunciaba en el Magreb la fórmula que permite calcular el número de combinaciones de un orden cualquiera sin necesidad de recurrir al Triángulo, y como, en Irán, al-Farisi, utilizaba el Triángulo para determinar los órdenes numéricos y desarrollar una expresión combinatoria general de los números figurados. Al tiempo que, en China, Chín Chiu Shao realizaba un estudio en profundidad de sus propiedades y Chu Shih Chieh lo utilizaba para resolver ecuaciones de orden superior. Más tarde serían, al-Kashi (siglo XV), Pedro Apiano (1527), Michael Stifel (1544), Tartaglia (1556), Stevin (1625) o Herigone (1634) quienes, con sus aportaciones, contribuirían a convertirlo en ejemplo vivo¹ de la construcción colectiva de los conceptos matemáticos, en particular, y de la ciencia en general.

En el artículo anterior habíamos relatado la forma en que Pascal describe el Triángulo Aritmético sin necesidad de incorporar a su discurso ni el análisis combinatorio ni los órdenes numéricos. En este veremos cómo se ocupa posteriormente de ambos temas. Didácticamente nos habíamos acercado a él a través del álgebra y de los recuentos, y lo habíamos analizado, ya no como herramienta sino como objeto matemático independiente. Ahora bien, puesto que hace tiempo que hemos

incorporado a nuestro discurso la aparición histórica de la Combinatoria, es el momento de abordarla también desde la didáctica. Para ello partiremos del siguiente problema que relata un episodio oscuro², de la mitología griega.



El Triángulo que algunos llaman de Pascal

Carlos Usón Villalba
 Ángel Ramírez Martínez
 historia.suma@fespm.org

La tupida tela de Ariadna

¿Cómo no pudo imaginar Teseo que Ariadna no se daría por vencida? ¿Cuán ciego estaba como para no imaginar que si la fe mueve montañas el amor las aplana?

Tras un violento despertar en las playas de Naxos, Ariadna fue consciente de que Teseo la había abandonado a su suerte. Despechada y herida en lo más profundo de su ser decidió tomar venganza.

El barco de Teseo parecía estar dotado de vida propia. Incapaz de mantener el rumbo, su proa apuntaba indistintamente hacia el Este o el Oeste al capricho de un viento suave y en apariencia inofensivo. Perdidos e indefensos decidieron tomar puerto sin saber si eran los dioses o la magia la que les había hecho recalar en tan singular enseada. Mientras buscaban alimentos Teseo parecía guiado por una fuerza extraña. Sordo a cualquier consejo atravesó la entrada de una cueva con la sensación de ser empujado a ella por su propio destino. Una luz acidulada atraía sus pasos como si aquella persuasión irracional le arrastrara hacia su interior desde la nada.

A su espalda, un destello fugaz y tenue, casi instantáneo, detuvo en seco sus pasos. Al girarse, a poco más de dos centímetros de su espada, el tenaz trabajo de Ariadna esperaba silencioso y tenso para darle su último abrazo.

Repujado de finísimas motas de polvo, un extraño reflejo le permitió percibir la perfección en toda su plenitud. Perlada de un misticismo fascinante, aquella estrella de mil perfiles distintos parecía haber diseñado el infinito entre sus ramas.

Extasiado, no pudo percatarse de la presencia del artrópodo cortando su retirada. Impedido su acero ante tal belleza, incapaz de asestar el mandoble definitivo que le permitiera atravesar la tela, sometió al criterio de la adversidad sus últimos pensamientos.

Pero Ariadna lo amaba y su presencia curó en seco la herida del abandono, disipando en un instante aquella ira que había alimentado su sed de venganza. La belleza en estado puro de aquel taimado subterfugio había sometido al soldado, al que no habían podido vencer en mil batallas. Sensible a la transmutación del guerrero, sus propias palabras le sacaron de un total ensimismamiento: *Tienes una sola oportunidad de salir con vida del envite —le increpó—¿Cuántas líneas, triángulos, cuadriláteros, pentágonos... contiene esta trampa?*

Más tarde, la leyenda describiría a una Ariadna desesperada rendida al amor de Dionisos con quien tendría cuatro hijos: Toante, Estásfilo, Enopión y Pepareto. Y, uno de los primeros capítulos de violencia de género, tan lamentablemente habitual en nuestros días, presentaría a Ariadna muerta a manos de Artemís por orden de Dionisos.

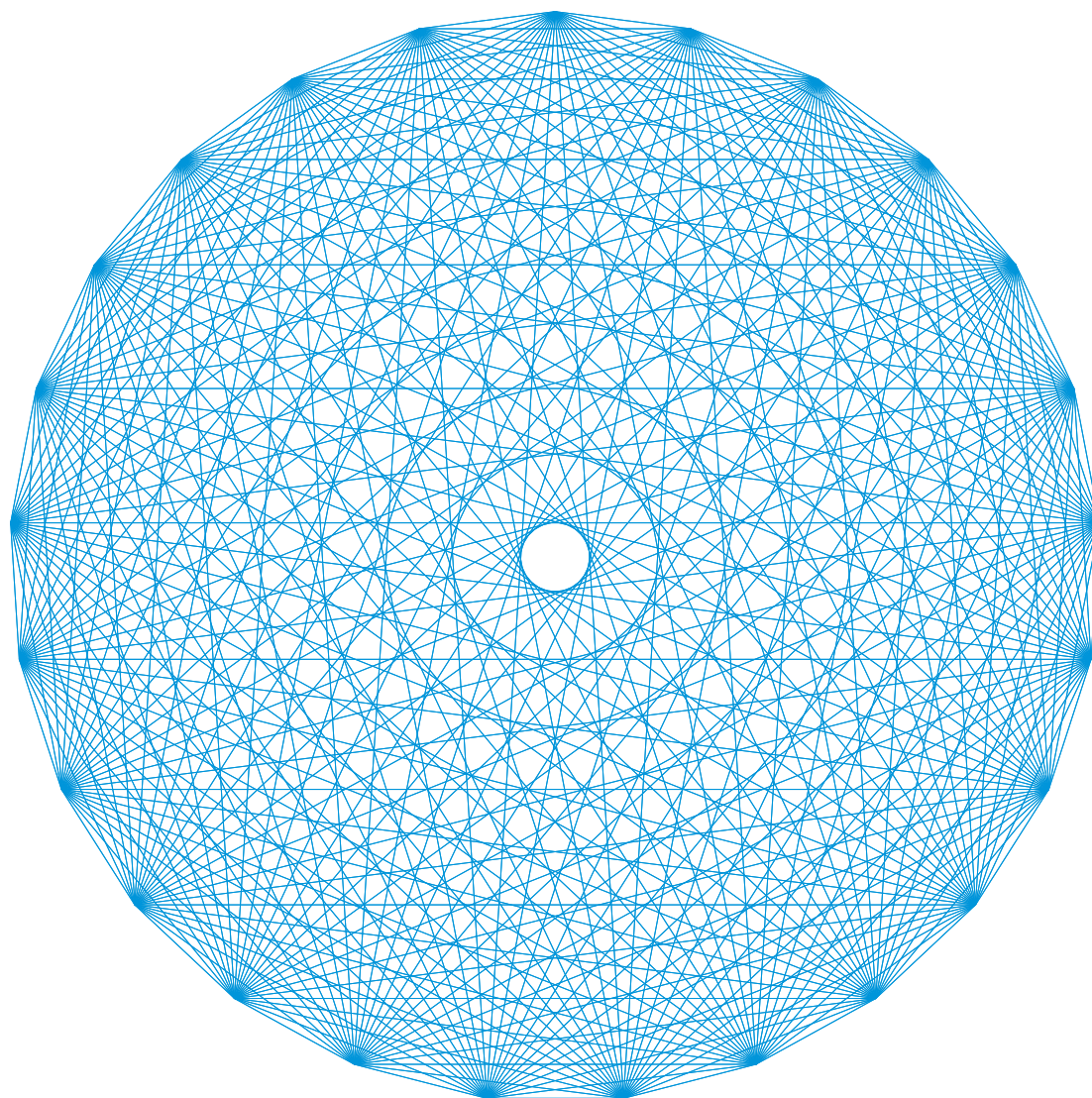
Mil finales para una historia a la que debes dar argumento.

Matrículas de coches

Si al salir a la calle nos fijamos en la primera matrícula que veamos ¿qué es más probable que tenga repetida alguna de sus cifras o que todas sean diferentes?

La tupida tela de Ariadna abre la posibilidad de acercarse a la fórmula de las combinaciones de n elementos tomados de p en p de forma absolutamente natural: Si de cada uno de los 25 puntos parten 24 hilos, el número total de hilos debería ser 25×24 . Algunos alumnos y alumnas reconocen rápidamente que cada uno de los hilos se ha contado dos veces al realizar el producto, otros necesitan que se ponga en duda su conclu-

sión para darse cuenta de este detalle. Casi ninguno apuesta por reducir el problema a otro más sencillo. Sin embargo los hay que proceden a obtener el resultado como suma de 24, que son los hilos que parten del primer punto, más 23, más 22, y así sucesivamente hasta llegar a 1. Esa técnica permite abordar la suma de $1+2+3+\dots+n$ y, de forma general, la de los n primeros términos de una progresión aritmética³.



La tupida tela de Ariadna

La segunda propuesta permite adentrarse con naturalidad en las VR_n^k y las V_n^k .

La importancia del orden y la repetición surgen con naturalidad. La misma que para ellos tiene la pregunta planteada en forma probabilística. Es un excelente momento para que anoten diez matrículas de otros tantos coches elegidos al azar, para definir la probabilidad de forma empírica con los más de doscientos datos con los que vamos a contar, para contrastar ese resultado con el que se obtiene de forma deductiva aplicando la fórmula de Laplace (1749 - 1827) y para acercarse al teorema de Bernouilli (1654-1705) e ir viendo como, a partir de los datos experimentales, la probabilidad fluctúa desde valores muy diversos y poco fiables si se toman los diez datos que aporta cada uno de los alumnos y como, sin embargo, va estabilizándose a medida que vamos acumulando los resultados de todos ellos.

Llegados a este punto, han aparecido en clase casi todas las fórmulas combinatorias y hemos dado un generoso impulso a algunos importantes conceptos probabilísticos. El problema de *Alisenda y Melquiades*, que solemos plantear antes que el de las matrículas, nos sirve para enlazar todo ello con el Triángulo Aritmético y, acto seguido, *Bajo la atenta mirada de Alá* nos permite adentrarnos en el inagotable mundo de las propiedades que encierra y de las que ya hablamos en el artículo anterior.

Pascal y la combinatoria

Antes de seguir con la didáctica resulta conveniente analizar un par de tratados del filósofo francés para tener una idea exacta de sus aportaciones a la Combinatoria. En *Uso del Triángulo Aritmético para las combinaciones* —un subcapítu-

lo, el II, de aquel que titula: *Diversos usos del Triángulo Aritmético cuyo generador es la unidad*— Pascal se centra en ellas de forma tangencial. Allí, después de definir las tal como lo hace hoy cualquier libro de texto y enunciar algunos lemas⁴, recupera una de las propiedades⁵ que ya había expuesto con anterioridad al enunciar las relaciones numéricas del Triángulo. De esta forma identifica las combinaciones con sus términos y anuncia un capítulo especial sobre las mismas, que tardará en aparecer un tiempo, y que tituló, sin más, *Combinaciones*. En ese amplio paréntesis, hizo uso del Triángulo para escribir sobre repartos de apuestas entre dos jugadores⁶, potencias, órdenes numéricos⁷, números factoriales y desarrollo de potencias del binomio. Temas a los que hay que añadir el estudio específico de la suma de potencias de los términos de una progresión aritmética. Un análisis que utiliza para conectar con una de sus grandes preocupaciones: los indivisibles. De todo ello iremos hablando más adelante pero ahora nos gustaría regresar a ese capítulo que, como ya dijimos, titula *Combinaciones* y estudiar sus aportaciones a este campo de la aritmética.

Combinaciones

En él, tras recordar todo lo que había dicho sobre ellas en *Uso del Triángulo Aritmético para las combinaciones*, traduce a expresiones combinatorias muchas de las propiedades que ya había reseñado al estudiar la disposición de los términos⁸ y los órdenes numéricos⁹. En cualquier caso el camino hacia el conocimiento que tenemos de él en estos momentos, es firme. Una vez establecidas las relaciones existentes entre los términos que lo componen e identificados estos con las Combinaciones, no nos quedaría otra cosa que expresar su cálculo como productos y cocientes de números consecutivos, y a ello dedica Pascal el capítulo *De numerorum continuorum productis*.

Allí, tras denominar *producto de números continuos* a lo que hoy denotamos con $n!$ y definir como *productos de segunda, tercera, cuarta... especie* a los que se pueden expresar como resultado de multiplicar dos, tres, cuatro, ... números consecutivos, recoge alguna de las propiedades que va descubriendo y expresa la emoción que le suscitan los resultados que obtiene y sus múltiples conexiones: *...adeo stricta connexione sibi mutuo cohaerent veritates!*

En el *Tratado de los órdenes numéricos*, Pascal había propuesto ya el cálculo del número de rangos 5 y 3 como

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

para pasar después a enunciar la conocida fórmula:

$$\frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1}$$

Pero es en *De numerorum continuorum productis* donde expresa las propiedades que, a su juicio, los caracteriza y que, traducidas al simbolismo que hoy nos es familiar, quedarían así:

1. $\forall n$ y $m \in \mathbf{N}$, $n < m$ se cumple:

$$\frac{(n-1)!}{m(m+1)\dots(m+n-2)} = \frac{(m-1)!}{n(n+1)\dots(n+m-2)}$$

2. $\forall n$ y $m \in \mathbf{N}$ se cumple:

$$\frac{(n+1)\dots(n+m)}{m!} \in \mathbf{N}$$

y es el número figurado $F_{n+m, m}$

Resulta sorprendente cómo la falta de una notación simbólica dificulta la exposición de las propiedades que el filósofo francés enuncia todavía en forma retórica.

3. $\forall n$ y $m \in \mathbf{N}$ se cumple:

$$\frac{(n+1)\dots(n+m)}{F_{n+m, n}} = n!$$

4. $\forall n$ y $m \in \mathbf{N}$ se cumple: $n!$ divide a $m!$

5. $\forall n$ y $m \in \mathbf{N}$ se cumple: $k!$ divide a $(n+1)\dots(n+m) \forall k \leq m$

6. $\forall n$ y $m \in \mathbf{N}$ se cumple:

$$\frac{n(n+1)\dots(n+m)}{(n+1)\dots(n+m+1)} = \frac{n}{n+m+1}$$

7. El menor producto de m números naturales consecutivos es $m!$

Resulta sorprendente cómo la falta de una notación con un elevado poder simbólico dificulta la exposición de las propiedades que, aunque nosotros hayamos optado por adaptarlas a los usos actuales, el filósofo francés enuncia todavía en forma retórica. Pero, más significativo aún resulta, desde un punto de vista didáctico, el exordio en el que explica cómo ha llegado a la fórmula general a partir de las conclusiones particulares que ha ido obteniendo. Un método inductivo negado en clase, a pesar

de su potencia como generador de resultados que subraya el mismo Pascal. Ahora bien, la perversión, con serlo, no radica en negar el método sino la posibilidad de búsqueda y, con ella, la consiguiente privación del placer del descubrimiento, ese que emocionaba a Pascal, unos párrafos antes.

En cualquier caso estas propiedades nos parecen interesantes desde muchos puntos de vista. Son tan elementales que sorprenden por ello y por haber sido enunciadas por Pascal, al que consideramos con justicia un excelente filósofo y un buen científico. Pero son interesantes precisamente porque su simplicidad refleja el pulso vital de quien las descubre, de quien, avanzando lentamente por un terreno sin explorar, siente la necesidad de fijar hitos en su camino con hallazgos que después le resultan elementales.

Ahora bien, esa apariencia de sencillez queda acentuada en la actualidad por el uso de una notación tan poderosa que, en muchos casos, contiene en sí misma la demostración de la propiedad que enuncia. No es lo mismo la farragosa dialéctica expositiva con que Pascal enuncia la primera propiedad: *Dados dos números cualesquiera, el producto de todos los números naturales que preceden al primero es al producto de un número igual de factores comenzando por el segundo, como el producto de todos los números naturales que preceden al segundo, es al producto de un número igual de factores comenzando por el segundo*, que formular, como se hace actualmente,

$$\frac{(n-1)!}{m(m+1)\dots(m+n)} = \frac{(m-1)!}{n(n+1)\dots(n+m)}$$

Una expresión que contiene de forma evidente la tautología $(n+m)! = (n+m)!$ sin más que equiparar medios y extremos.

La conquista de un simbolismo capaz de expresar de forma sintética la esencia misma de aquello a lo que hace referencia ha constituido un largo proceso, del que ahora nos beneficiamos pero del que no queda en nuestras aulas huella alguna, hasta el punto de que, muchas veces, el alumnado vive la notación simbólica más como una tortura que como un alivio. Y es que, en el aula, como en el desarrollo histórico, es imposible saltarse los pasos intermedios. Es necesario que nuestras alumnas y alumnos utilicen un álgebra retórica antes de institucionalizar la simbólica. Es preciso sentir la necesidad de una formulación sintética antes de que ese modelo se convierta en pauta para una imposición irracional completamente alejada de sus necesidades. La construcción del lenguaje algebraico es una conquista lenta que debería recorrer transversalmente todo el currículum de matemáticas. La historia, una vez más, nos muestra cómo las dificultades epistemológicas tienen carácter propio pero, al mismo tiempo, nos enseña también cómo superarlas desde la paciencia de un trabajo específico y continuado. Esa misma lenta persistencia con la que ha ido avanzando la ciencia.

Como ya señalamos en otro artículo, aprender por pura memorización un resultado final, tan alejado de su razón última y del proceso creativo de quienes lo ingeniaron, en ocasiones tras siglos de pasos intermedios y refinamientos sucesivos, no tiene otro sentido que adiestrar en la disciplina de la obediencia ciega a normas incomprensibles y preestablecidas.

Pascal y las potencias

Llegados a este punto merece la pena analizar la aportación del filósofo francés en este terreno al que dedica una más que limitada, aunque tremendamente significativa atención, en un capítulo titulado: *Potestatum numericarum summa* que, a renglón seguido, se convierte en *Ad summam postetatum cujuslibet progressionis inveniendam unica ac generalis methodus*. En él propone un método general para el cálculo de la suma de las potencias de una progresión aritmética. Como es habitual en su discurso, comienza con un ejemplo: la suma de $5^3+8^3+11^3+14^3$, para lo que se apoya en el cálculo de 17^4 que expresa como $A^4+12\cdot A^3+54\cdot A^2+108A+81$, haciendo uso del desarrollo del binomio $(A+3)^4$. Dado que, aplicando esa fórmula, $17^4=14^4+12\cdot 14^3+54\cdot 14^2+108\cdot 14+81$, podemos restar $108\cdot(5+8+11+14)+54\cdot(5^2+8^2+11^2+14^2)+5^4+4\cdot 3^4$ a 83.521, que es el valor de 17^4 , y dividir entre doce el resultado de la resta para obtener la suma buscada: $5^3+8^3+11^3+14^3$.

Estas propiedades nos parecen interesantes desde muchos puntos de vista. Son tan elementales que sorprenden por ello y por haber sido enunciadas por Pascal, al que consideramos con justicia un excelente filósofo y un buen científico.

El método, de fácil aplicación, según valora el propio el autor, queda demostrado por él mismo como sigue¹⁰:

$$\begin{aligned} 17^4 &= (17^4-14^4) + (14^4-11^4) + (11^4-8^4) + (8^4-5^4) + 5^4 = \\ &= (12\cdot 14^3+54\cdot 14^2+108\cdot 14+81) + \\ &+ (12\cdot 11^3+54\cdot 11^2+108\cdot 11+81) + \\ &+ (12\cdot 8^3+54\cdot 8^2+108\cdot 8+81) + \\ &+ (12\cdot 5^3+54\cdot 5^2+108\cdot 5+81)+5^4= \\ &= 12\cdot(5^3+8^3+11^3+14^3)+ \\ &+ 54\cdot(5^2+8^2+11^2+14^2)+ \\ &+ 108\cdot(5+8+11+14)+ \\ &+ 4\cdot 81+5^4 \end{aligned}$$

con lo que, efectivamente queda demostrado el ejemplo. Nada dice de cómo se obtienen 12, 54 y 108 que, evidentemente son:

$$\binom{4}{1} \cdot 3, \binom{4}{2} \cdot 3^2 \text{ y } \binom{4}{3} \cdot 3^3$$

En este claro proceso inductivo, Pascal procede ahora a dar un enunciado general, que es traslación directa del que describe en el ejemplo, y que le sirve para formular con posterioridad una aplicación particular. Concretamente, a la suma de la sucesión de las potencias de los números naturales. Un resultado que le es de gran interés para la determinación de áreas de figuras curvilíneas *como podrán percibir al primer vistazo todas aquellas personas que estén familiarizadas con el tema de los indivisibles*, razón última de su estudio.

Pascal no aborda en este capítulo el cálculo del término general ni de la suma de una progresión aritmética de orden k . Y sin embargo hace referencia a él en el opúsculo titulado: *Uso del triángulo aritmético para los órdenes numéricos*. Es esta una materia, que queda excluida de los temarios actuales, aunque se aborde de forma tangencial e incompleta en los ejercicios de cálculo del término general de una sucesión. En ellos se universaliza un procedimiento que llevaría fácilmente a la obtención de una fórmula global, pero nunca hemos visto que fuera del interés de nadie, a pesar de la obsesión algebraica de nuestros temarios. Así, en un procedimiento aplicable a un caso cualquiera, se presupone como término general de la sucesión aritmética de orden dos¹¹: a_1, a_2, a_3, \dots un polinomio de segundo grado: an^2+bn+c , que exige resolver el sistema:

$$\left. \begin{aligned} a + b + c &= a_1 \\ 4a + 2b + c &= a_2 \\ 9a + 3b + c &= a_3 \end{aligned} \right\}$$

del que se obtiene como respuesta:

$$\left\{ \begin{aligned} a &= \frac{a_3 - 2a_2 + a_1}{2} \\ b &= \frac{8a_2 - 5a_1 - 3a_3}{2} \\ c &= 3a_1 - 3a_2 + a_3 \end{aligned} \right.$$

y como término general:

$$a_n = \frac{a_3 - 2a_2 + a_1}{2} n^2 + \frac{8a_2 - 5a_1 - 3a_3}{2} n + (3a_1 - 3a_2 + a_3)$$

Hay que reconocer que la expresión no es bonita¹² pero, haciendo las transformaciones:

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= d_1 \\ x_3 - x_2 &= d_2 \\ d_2 - d_1 &= d \end{aligned}$$

aparece esta otra:

$$a_n = \frac{d}{2} n^2 + (d_1 - \frac{3}{2}d)n + (a_1 - d_1 + d)$$

que ya sólo depende de a_1, d_1 y d .

Como alternativa, hace ya algunos años, Ivan Ruiz¹³ (entonces alumno de Primero de BUP y hoy frutero) obtuvo el término general de una progresión aritmética de orden k cualquiera, a partir del estudio de una sucesión concreta de segundo orden. Unos pocos años más tarde, sería Javier Eced Cerdán (entonces alumno de 3º de ESO) quien, a la vista de la sucesión de números triangulares y piramidales en el Triángulo Aritmético, indujo que la sucesión de las sumas parciales de los términos de una progresión aritmética de orden k era una progresión aritmética de orden $k+1$ ¹⁴. Con lo que resolvía de paso el problema de encontrar la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética de orden k como término general de una aritmética de orden $k+1$ afectada de algunas condiciones respecto de los primeros términos¹⁵. Obteniendo las siguientes fórmulas para el término general (a_n) y la suma (S_n) de una progresión aritmética de orden k cualquiera:

$$a_n = a_1 + d_1^1(n-1) + d_1^2 \frac{(n-1)(n-2)}{2!} + \dots + d_1^k \frac{(n-1)\dots(n-k)}{k!}$$

que equivale a:

$$a_n = \binom{n-1}{0} a_1 + d_1^1 \binom{n-1}{1} + d_1^2 \binom{n-1}{2} + \dots + d_1^k \binom{n-1}{k}$$

y para la suma:

$$S_n = a_1 \cdot n + d_1^1 \frac{n \cdot (n-1)}{2!} + \dots + d_1^{k-1} \frac{(n)\dots(n-k+1)}{k!} + d_1^k \frac{(n)\dots(n-k)}{(k+1)!}$$

que podemos expresar como:

$$S_n = \binom{n}{1} a_1 + d_1^1 \binom{n}{2} + \dots + d_1^{k-1} \binom{n}{k} + d_1^k \binom{n}{k+1}$$

con

$$d_1^i = d_2^{i-1} - d_1^{i-1} \quad \forall i = 1, \dots, k; \quad d_1^k = d; \quad d_1^0 = a_j$$

Aplicando estas fórmulas al problema planteado por Pascal y teniendo en cuenta que si partimos de una progresión aritmética de orden uno y diferencia d , los cuadrados constituyen una progresión aritmética de orden dos, de diferencia $2d^2$, los cubos de orden tres, y diferencia $6d^3$, etc. el problema de

Pascal se resuelve de forma inmediata sin necesidad de aquellos tediosos pasos intermedios que proponía el filósofo francés y que, como método aritmético, resultaba escasamente eficaz al tener que calcular todas las potencias y sumas anteriores a las de la adición buscada. Y es que, aunque tras ellos se intuya el espíritu aplicado de quien ve en los métodos iterativos un modelo fácilmente automatizable, la preocupación de Pascal estaba centrada, en esos momentos, en el cálculo de áreas curvilíneas de todos los géneros de parábolas y de la medida de una infinidad de otras magnitudes, como recoge en la conclusión del capítulo *Potestatum numericarum summa* al que venimos haciendo referencia.

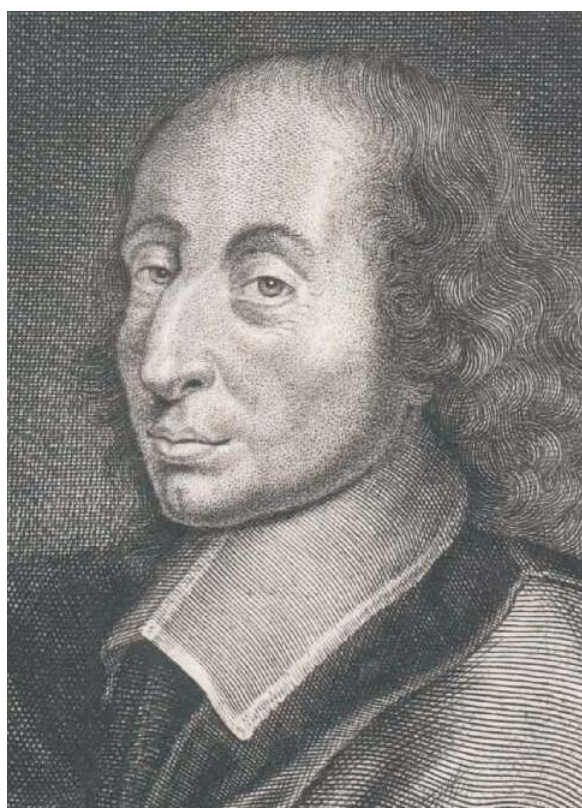
Acerca del Pascal matemático

El verdadero peso de Pascal dentro de las Matemáticas va más allá del Triángulo que lleva su nombre y que muy bien podría denominarse de Ibn al-Banna, Al-Farisi, Chin Chiu Shao, Chu Shih Chieh, Tartaglia, al-Kashi, Stevin, Herigone, Pedro Apiano, Stifel, Bhaskara, Levi ben Gerson, Pingala, Halayudha... y tantos otros pero que, sin duda, sería mucho mejor nombrar, tal como se hiciera históricamente e hizo el propio Pascal: *Triángulo Aritmético* porque esa denominación recoge el verdadero sentido de lo que realmente fue: un paradigma de la creación científica como empresa intemporal de todo un colectivo de pensadores y pensadoras.

En realidad, el mérito matemático de Pascal se encuentra diseminado en varias disciplinas: cálculo de probabilidades, cálculo infinitesimal y, sobre todo y enlazado con esta última, geometría, a la que dedicó sus mejores atenciones. Ya en 1640 presentó una generalización al trabajo de Desargues que hoy luce con justicia su apellido. Un teorema precioso que dice así: *Dados cualesquiera seis puntos de una cónica, la prolongación, fuera de ella, de los lados del hexágono hace que sus tres pares de lados opuestos se corten en una misma recta*. Un importante paso hacia la geometría proyectiva que culminaría en Poncelet, que fue aplaudido por Desargues, Roberval, Mersanne y el mismísimo Leibnitz y al que Pascal trató con orgullosa indiferencia.

Otra importantísima aportación, en este terreno, fue el estudio de la cicloide¹⁶. Este trabajo, al que incorpora el uso de las propiedades obtenidas en el análisis del Triángulo Aritmético, lo colocó a las puertas del cálculo diferencial que posteriormente desarrollarían Newton y Leibniz. Voltaire se estremeció ante este abandono voluntario de la investigación científica por parte de Pascal en vísperas de un gran descubrimiento pero... las verdades matemáticas no satisfacían a este hombre atribulado y enfermo cuya mayor preocupación estaba en el más allá, ni ofrecían consuelo a sus etapas de agobio en el más acá.

En cualquier caso es obligado señalar, en coherencia con nuestra adhesión a las tesis de Feyerabend, que este capítulo



es uno de los menos gloriosos de su trayectoria personal. En lugar de publicar sus resultados, o enviarlos a la Academia de Ciencias de París como era habitual en él, se dejó vencer para organizar un concurso que tenía a la cicloide como objeto. A él se presentaron científicos de la talla de Lalouvière, Wren, Wallis o Huyghens, sin que ninguno alcanzase el nivel que aportaba la solución de Pascal quien, en lugar de optar por la discreción, dada la vía de concurso público que había elegido, reclamó para sí triunfo y premio, cosechando de paso la animadversión de los participantes que se sintieron, como no podía ser de otro modo, engañados y vilipendiados.

Sin embargo, al margen del estudio del Triángulo, no podemos acabar esta brevísima reseña de su trabajo matemático sin añadir algunos tratados a los que todavía no habíamos hecho referencia anteriormente y que en su *Epístola a la muy ilustre Academia de Ciencias de París*, el propio Pascal enumera en 1654 como: *En torno a las potencias numéricas, De los números múltiplos de otros, De los números mágicamente mágicos, Generalización del Apolonio francés, Los contactos esféricos, Los contactos cónicos, Los lugares planos, Obra completa de las cónicas y Un método de perspectiva*, al margen claro está de *La geometría del azar* a la que nos referiremos en otro momento. ■

NOTAS

¹ Vivo sí, al menos en nuestras aulas donde continúa generando a su alrededor un sinfín de resultados matemáticos.

² Puesto que desconocemos si la tradición occidental ha descrito el paréntesis mitológico que va desde que Ariadna es abandonada por Teseo hasta su relación con Dionisos.

³ En este caso suele ser preferible aparcar el tema de las progresiones hasta que se haya generalizado la fórmula de las C_n^k , tras un breve proceso inductivo que no suele presentar mayores dificultades que las que resuelve una goma para explicar cómo se forma un triángulo a partir de una recta o un cuadrilátero a partir del polígono de tres lados.

⁴ Como por ejemplo:

No existe C_n^m si $m > n$;

$$C_n^0 = C_n^n = 1; C_n^1 = n$$

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$$

$$\binom{n}{m} = C_n^m \text{ con } n \text{ y } m = 0, 1, 2, \dots$$

⁵ $C_n^0 + C_{n+1}^1 + \dots + C_{n+m}^m = C_{n+m+1}^m$

⁶ Posiblemente una de las razones de ser de su estudio, a tenor de las cartas que cruza con Fermat sobre el tema.

⁷ Que, como ya señalamos en otro capítulo, no es otra cosa que la descomposición del Triángulo, según sus filas, en unidades, números naturales, triangulares, piramidales, etc. A ellos dedicaremos el siguiente artículo.

⁸ Véase el artículo anterior: *En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. Un universo nacido de la nada (IV)*.

⁹ Concretamente, expresadas de forma sintética:

$$C_{n+m}^m = C_{n+m}^n; C_{n+1}^n = C_{n+1}^1 = n + 1; \frac{C_{n+m-1}^n}{C_{n+m-1}^m} = \frac{m}{n}; \frac{C_{n+1}^k}{C_n^k} = \frac{n+1}{n+1-k} \text{ con } k < n < n+1$$

$$\frac{C_{n+1}^k}{C_n^{k+1}} = \frac{k+1}{n-k} \text{ con } k < k+1 < n$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^{n+1} = 2(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + \dots + C_{n-1}^{n-1})$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n - n = 2 \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^i C_i^j$$

¹⁰ La demostración de Pascal es algo menos sintética que la que incluimos como tal.

¹¹ Denominamos progresión aritmética de orden 1 a una sucesión de números cuya diferencia entre dos términos consecutivos es constante. Cuando estas diferencias conforman una progresión aritmética de orden 1 diremos que la progresión aritmética tiene orden 2 y así sucesivamente. Pascal, haciendo referencia a las filas y columnas del Triángulo Aritmético los denominará órdenes numéricos. A ellos dedicaremos el siguiente artículo.

¹² El gusto de las matemáticas por una regularidad simplista ha hecho de ese criterio estética.

¹³ Á. Ramírez y C. Usón [1998]

¹⁴ Si la sucesión es $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ y consideramos $S_1=0, S_2=a_1; S_2=a_1+a_2;$ etc. tenemos que $S_3-S_2=a_2; S_2-S_1=a_1;$ y como consecuencia $\{S_n\}$ es una p. a. de orden $k+1$ porque sus diferencias constituyen una progresión de orden k .

¹⁵ En otro momento Beatriz Díaz Rabasa (4º de ESO) y otras compañeras eliminaron esas condiciones iniciales calculando a_{n+1} .

¹⁶ Según su hermana Gilberta, Pascal se ocupó de este problema para distraer un dolor de muelas. Sobre el uso curativo de las matemáticas, que sepamos, no ha escrito nadie todavía, sobre los deterioros mentales que se le adjudican han corrido sin embargo ríos de tinta... señor, señor, ¡lo que hace la mala prensa!

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Añadiremos a las ya citadas en los artículos anteriores:

RAMÍREZ, Á. y USÓN, C. (1998): *Variaciones sobre un mismo tema*. Editorial Proyecto Sur. Granada