SUMA 53
Noviembre 2006, pp. 19-26

Matemáticas, mitología y poesía. Aritmética en la *Antología palatina* (I)

La Antología Palatina es un enorme mosaico de epigramas que reflejan la cultura del helenismo tardío. La edición abreviada en castellano de la Antología Griega no ha recogido hasta ahora ninguno de los cuarenta y cinco epigramas de carácter matemático. Los profesores conocemos bien el poema que nos permite calcular los años de Diofanto, a través de los hechos significativos de su vida. El resto son menos populares, si bien poseen un gran encanto y merece la pena reproducirlos.

The Palatine Anthology is an enormous mosaic of epigrams that reflects the last Hellenic culture. The Greek Anthology short edition in Spanish does not contain any of the mathematical epigrams. Mathematics teachers know the poem about Diofantus , poem that allows us to calculate his age with the help of the different facts of his life. The other epigrams are less well known, but have a great charm and it is important to reproduce them.

La poesía cumple múltiples y fundamentales papeles en el desarrollo humano: como forma de conocimiento primigenio —anterior a la filosofía—, como técnica de memorización a través del ritmo y la rima en un mundo sin papel, y ¡cómo no! la posibilidad del gozo estético al sumergirnos en su belleza.

La poesía en forma de drama ha sido factor constituyente de lenguas y pueblos. Grecia no sería entendida sin Homero y sin esa dramaturgia clásica que tanto irritaba a Platón. Inglaterra y el inglés necesitaron a Shakespeare. Y en España quizá no haya hoy conciencia del impacto sobre el pueblo de las obras de Lope.

La poesía en forma de drama ha sido factor constituyente de lenguas y pueblos.

La educación poética ha formado parte de la educación general de cualquier persona culta. En el medioevo occidental, pero más en especial en al-Andalus, o en la India del sánscrito, abundaron los tratados científicos, médicos y matemáticos, o sus resúmenes, escritos en verso. Durante el Renacimiento se conservó la tradición, y por ejemplo Tartaglia daba en verso el método de resolución de la ecuación de tercer grado.

No debe sorprendernos que el enunciado de los problemas aritméticos se haga en verso. La Antología Palatina de epigramas griegos conserva 45 ejercicios que utilizan la forma poética para plantearse. Algunos son muy conocidos como aquel que nos permite calcular cuántos años vive Diofanto. Pero lamentablemente la mayoría siguen inéditos en castellano.

Y si la poesía nos permite adentrarnos en lo desconocido, la mitología nos ofrece soluciones, nos da respuestas. Es posible que el ser humano necesite mitos: cuando rompe algunos tiende a fabricar otros. Francis Bacón —uno de los padres de la modernidad— hacía de la destrucción de ciertos ídolos culturales uno de los ejes de su filosofía.

La mitología griega tiene hoy para nosotros un encanto especial. Esos dioses que se pelean, que se casan con mortales, aliados de pueblos y héroes, furiosos y vengativos, con su infinidad de variedades y seres intermedios, hacen que los mitos griegos sigan siendo muy útiles para definir situaciones: complejo de Edipo, condena de Sísifo, caja de Pandora, talón de Aquiles o dilema de Antígona son mera muestra de las posibilidades que encierra la *sabiduría* clásica de los helenos.

Ángel Requena Fraile
IES Enrique Nieto
Melilla

El atractivo mitológico de la Grecia Clásica se encuentra muy patente en la Antología Palatina. Al encantamiento poético se une la rememoración de las tradiciones culturales. Si leemos *Sémele* como simple nombre de mujer, no sentiremos lo mismo que quien escuchaba el enunciado de los problemas que mencionan a la hija de Cadmo, el fundador de Tebas; pues desconocemos su espléndida belleza heredada de Armonía, que yace con Zeus y que muere abrasada por querer ver el verdadero rostro del supremo dios.

Los epigramas aritméticos eran en su momento un ejemplo de lo que hoy llamamos interdisciplinaridad.

Los epigramas aritméticos eran en su momento un ejemplo de lo que hoy llamamos interdisciplinaridad. En nuestra época esa transversalidad es aún mayor dado el doble alejamiento: el de la cultura literaria de la científica y el de la cultura cristiana de la pagana.

Desde el punto de vista matemático es de interés resaltar que los ejercicios de la Antología son de carácter aritmético-algebraico elemental. Esto nos lleva al periodo post-clásico; Diofanto fue la excepción de la matemática griega. El temprano tropiezo con los irracionales hacen que sea la geometría la hegemónica. La aritmética griega es mas mística de números que de operaciones, pues para los meros cálculos el término empleado era *logística*, y como tal impropio de los filósofos.

La reproducción comentada de los epigramas aritméticos solo nos permite un mínimo acercamiento a un mundo que aunque olvidado sigue fertilizando nuestro pensamiento.

La antología palatina

La colección de epigramas griegos conocida como Antología Palatina corresponde al periodo bizantino. La compilación se realiza hacia el año 980 d.C. mediante la ampliación de la recopilación realizada por el protopapa Constantino Cefaleas en el año 917.

El libro XIV —donde se encuentran los ejercicios aritméticos— es un añadido al texto de Cefaleas.

El manuscrito griego del siglo X recibe su nombre por haberse descubierto en la biblioteca de los Electores del Palatinado de Heidelberg en el año 1606. Posteriormente el códice –hoy reconocido como P23– ha sufrido algunos traslados. En 1622 el P23 pasa a Maximiliano de Baviera que se lo regala al Papa Gregorio XV. Napoleón se lo lleva a Francia en 1797, pero tras su caída la mayoría del manuscrito vuelve a Heidelberg y el resto, incluido el libro XIV, permanece en París.

Los epigramas aritméticos junto con las adivinanzas y los oráculos constituyen el Libro XIV. La colección contiene 45 ejercicios en verso. El mayor bloque lo forman los 39 de la recopilación de Metrodoro, 1 es de la Iliada, y el resto son del epigramista Sócrates.

De Metrodoro se conoce poco, y puede haberse limitado a compilar. El Sócrates del P23 puede ser el referenciado por Diógenes Laercio.

En castellano se puede encontrar una edición abreviada de la Antología editada por Gredos pero que no contiene ninguno de los epigramas aritméticos.

Esporádicamente en algunos libros en lengua española nos tropezamos con algún ejercicio. En ciertos casos citando la procedencia. Donde aparecen un mayor número de problemas —12 de los 45— es en la traducción de las Matemáticas Recreativas del belga Mauricio Kraitchik.

La antología completa en ediciones bilingües se encuentra en francés e inglés. En francés, además, se tiene el estudio matemático de uno de los patriarcas de la historia de las matemáticas: Paul Tannery.

El epigrama

En sus orígenes los epigramas son inscripciones grabadas en piedra sobre monumentos o tumbas como epitafios, dedicatorias, o meras explicaciones. El poeta de origen ibérico Marcial extiende el significado a toda poesía corta que termina en burla o broma.

En el Códice Palatino P23 el epigrama ya ha ampliado su carácter a poesía corta, casi didáctica, e incluso sirve de enunciado de ejercicios aritméticos.

En cuanto a la forma, la mayoría de los poemas están en hexámetros dactílicos, y en algún caso trímetros yámbicos. En nuestra versión el aspecto poético queda subordinado a la comprensibilidad del ejercicio.

La aritmética de la antología palatina P23

Los 45 ejercicios matemáticos del Libro XIV se resuelven con técnicas aritméticas simples, sobre todo operando con fracciones. En algunos casos —y por costumbre— es bueno usar el álgebra elemental. No se alcanza nada parecido al nivel de los problemas de la Aritmética de Diofanto.

Los ejercicios tratan de cálculos de edades, grifos, distancias, o repartos de nueces o manzanas. Ejemplos similares han seguido usándose durante generaciones.

Del manuscrito griego tienen interés los escolios, en ellos se encuentra alguna notación que simplifica.

Pitágoras de Samos, 582 – 496 a.C.

Problema 1: La escuela Pitagórica

> Pitágoras afortunado, vástago de las Musas del Helicon, dime cuántos en tu morada se dedican gozosamente a la ciencia practicar.
> — Te responderé Polícrates: por la belleza matemática la mitad se interesa; sobre la naturaleza inmortal una cuarta parte se vuelca; en total silencio una séptima se dedica a las voces eternas del alma; hay tres mujeres, Teano la mejor. De las Pieridas son las palabras que yo pronuncio.
>
> Sócrates

Contexto histórico y mitológico

Las *Musas* son hijas de Zeus. Mencionadas por Homero, será Hesiodo quien les da el carácter de inspiradoras de las artes. Las Musas de cada disciplina son: Clio (historia), Euterpe (música), Talía (comedia), Melpómene (tragedia), Terpsícore (danza), Erato (poesía erótica, gozosa, anacreóntica), Calíope (elocuencia), Polimnia (lírica), Urania (astronomía).

El *Helicón* es el monte griego donde vivían las Musas.

Pieridas es un sinónimo de Musas.

Polícrates fue tirano de Samos, lugar de origen de Pitágoras.

Pitágoras es un personaje histórico y una figura mítica. En el siglo V a.C. fue fundador de una escuela-secta que contó con el apoyo de algunos tiranos de la Magna Grecia. La formación iniciática se atribuye a los egipcios. Para los pitagóricos *todo es número*, creen en la trasmigración de las almas, y atribuyen todos sus logros al maestro. La escuela ejerce una gran influencia en Platón. Pitágoras esta asociado a su famoso teorema sobre el triángulo rectángulo, a la música y a los términos filosofía y matemáticas.

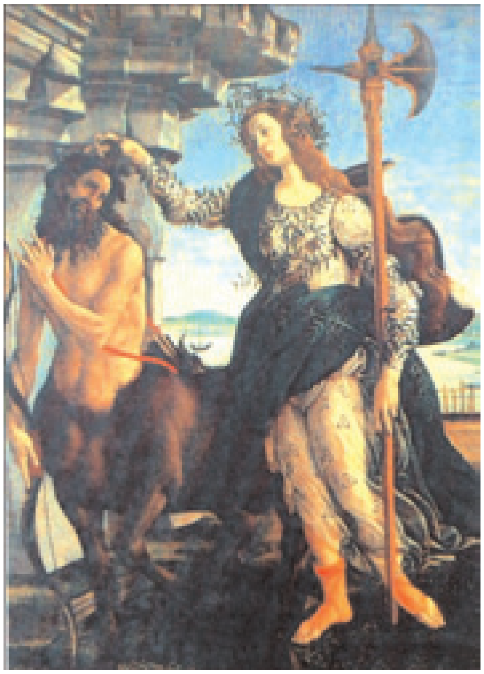
> *Pitágoras fue fundador en el siglo V (a.C.) de una escuela–secta que contó con el apoyo de algunos tiranos de la Magna Grecia.*

Teano estuvo casada con Pitágoras en su vejez. Pese al carácter aristocrático y mistérico de la escuela pitagórica, en ella no había discriminación de sexo tal como pone de manifiesto el epigrama. Teano será la primera mujer en la ciencia con nombre propio.

Solución: La escuela está formada por 28 personas.

La suma de 1/2, 1/4 y 1/7 es 25/28. La diferencia a 1 da 3/28 que es la fracción de mujeres. Como hay 3, el total de pitagóricos es 28.

Tenemos entonces 14 matemáticos, 7 físicos, 4 místicos y 3 sabias.



Palas y Centauro (1483–184) de Sandro Botticelli

Problema 2: La estatuilla de oro

Primer problema de Metrodoro:

> Soy una Palas de oro al martillo moldeada;
> el noble metal es ofrenda de poetas de profundo talento.
> Carisos ha proporcionado la mitad del oro,
> un octavo Terpis, y Solón un décimo;
> Temisón, un veintavo. Faltan nueve talentos,
> y el trabajo, ambos donados por Aristodicos.

Contexto histórico y mitológico

Palas era un hijo de gigantes que muere en Atenas en la última batalla entre los dioses y los gigantes. La diosa Atenea se hace una coraza con su piel. En ese momento Palas es también uno de los nombres de la hija de Zeus, por eso se ha puesto en femenino. *Atenea* es la diosa de la sabiduría, pero también guerrera, pero no por su fuerza, pues para vencer utiliza la inteligencia. Los templos de la diosa se llamaban ateneos, allí poetas y oradores le rendían homenaje.

Carisos, *Terpis*, *Solón*, *Temisón* y *Aristodicos* son poetas preclásicos. Los más citados son Terpis, siglo VI a.C., a quien se atribuye la primera tragedia, y Solón, siglo VII a.C., ateniense elegante y moralizador.

El *talento* es una moneda de 60 minas que se conservará bajo el imperio romano y la edad media europea.

Solución: 40 talentos.

La suma de 1/2, 1/8, 1/10 y 1/20 es 31/40. La diferencia a la unidad da 9/40. Como faltan 9, el total es 40.

Carisos aporta 20 talentos, Terpis 5, Solón 4, Temisón 2 y Aristodicos los 9 restantes.

Problema 3: Amor está triste

Número 5 de la colección de Metrodoro:

> Tan triste se encontraba Amor, que Afrodita le preguntó:
> <¿Qué pena, niño, te ensombrece?> Y el respondió:
> <De mis brazos, una tras otras, las Musas han cogido
> las manzanas que yo traía del Helicón.
> Clio una quinta parte y Euterpe una doceava
> me arrebataron; Talía me quitó una octava;
> Melpómene, una veintava, y una cuarta Terpsícore;
> a las manos de Erato se ha ido una séptima.
> Por su parte, Polimnia treinta manzanas
> se ha guardado. Urania posee ciento veinte
> y Calíope cargó con un canasto de trescientas.
> Así, he llegado ante tí bien ligero de brazos:
> con cincuenta manzanas. ¡Esto me han dejado!>.

Contexto histórico y mitológico

Amor tiene diferentes tradiciones en la mitología. De Eros, dios primigenio, al hijo de Afrodita y Zeus. Este último pervive en Cupido como hijo de Venus y Júpiter. Fue Praxíteles el primero en representarle como un joven impúber.

Afrodita es la diosa del amor, proviene de la divinidad siria Astarté, pero en Grecia se va debilitando la relación con la fecundidad y reforzandose la pasión amorosa.

Las caprichosas Musas y el Helicón se describen en el problema 1.

Solución: 3360 manzanas.

Si sumamos la fracciones 1/5, 1/12, 1/8, 1/20, 1/4 y 1/7 obtenemos 715/840 que simplificada es 143/168. La diferencia a la unidad, que es la fracción restante da 25/168. Las manzanas contabilizadas son la suma de 30, 120, 300 y 50, en total 500 manzanas que son 25/168 del total. Hay que multiplicar 168 por 500/25 que resulta 3360 frutas.

> *Afrodita es la diosa del amor, proviene de la divinidad siria Astarté.*

Venus y Cupido (1606–1611) de Peter Paul Rubens

Problema 4: Los establos de Augias

> Al ser preguntado por Alcides, el del brazo fuerte,
> sobre el número de sus bueyes, Augias respondió:
> <Cerca del río Alfeo tengo la mitad;
> una octava parte rumía en las laderas del Cronios;
> alejados del Taraxippos, una doceava se mantiene
> próxima al sagrado recinto; en la Elide divina
> pastan una veintava; en la Arcadia, ¡por fin!,
> he dejado la treintava parte. Y aquí puedes ver
> el resto de mi rebaño: cincuenta cabezas>.
>
> Sócrates

Contexto histórico y mitológico

Augias es un rey legendario de Élide. Sus establos contenían 3000 bueyes (en el problema no hay tantos). Como no limpiaba, Heracles —el héroe que personifica la fuerza— se comprometió por un diezmo a desviar el río Alfeo para hacerlo pasar por los establos y llevarse la suciedad. Augias no cumple y Heracles lo mata y saquea su ciudad.

El *Alfeo* es un río del Peloponeso, formado por un antiguo dios que enamorado de la ninfa Aretusa es convertido en río por Artemisa, y la ninfa pasa a ser su fuente.

Del *Taraxippos* tenían que alejarse los caballos, los jinetes podían ser heridos. La proximidad producía terror.

La *Arcadia* es una región montañosa del centro del Peloponeso. Para los poetas es el lugar de la felicidad pastoril.

Solución: 240 bueyes.

La suma de las fracciones 1/2, 1/8, 1/12, 1/20 y 1/30 es 95/120, y su diferencia a la unidad da 25/120. Como quedan 50 por contabilizar, el número total es 120 por 50/25, o sea 240.

Problema 5: Un reloj sin igual

De la colección de Metrodoro es el 28, y de la Palatina el 6:

> Dinos reloj sin igual,
> qué parte del día ha huido ya,
> si lo que queda es dos veces dos tercios
> de lo que pasó.

Contexto histórico y mitológico

Los relojes de la época eran solares, de agua (clepsidras), de arena, de vela...

En el periodo alejandrino tardío, en especial con el ingeniero Heron, la cultura griega estuvo muy cerca de la máquina de vapor y de la utilización sistemática de engranajes.

El primer reloj mecánico documentado data de la China clásica.

La división del día en doce horas ya era usada en el imperio romano, pero con horas de diferente duración según la estación del año.

Solución: Han huido 3/7 del día.

El doble de 2/3 es 4/3 que sumado a 1 da 7/3. El día completo es 7/3, de lo que ha transcurrido. Por tanto lo que ha huido es la fracción inversa: 3/7.

Clepsidra

Problema 6: El león de bronce

De la colección de Metrodoro es el 19, y de la Palatina el 7:

> Soy el León de bronce. Mis dos ojos, mi hocico,
> ... y hasta mi pie derecho son fuentes.
> Para llenar el estanque mi ojo derecho dos días necesita,
> el izquierdo requiere tres, y mi pie tarda cuatro.
> Seis horas le bastan a mi hocico para completar el aljibe.
> ¿Cuánto tiempo se necesita para colmar el estanque
> si pongo mis cuatro fuentes a manar?

Contexto histórico y mitológico

La escultura griega en bronce fue la admiración de la Europa medieval, hasta el punto que un reto renacentista fue conseguir la misma perfección.

Leones en El Retiro de Madrid

El problema sigue siendo hoy un gran clásico. Generaciones tras generaciones han ido chocando con este ejercicio. Considerado como *problema para nota* conserva el encanto de su espléndido pasado.

Solución: Se llenará el estanque en 12/61 de día (aproximadamente 4horas 43minutos).

Para resolver el ejercicio se calcula qué fracción de estanque llena cada fuente en un día. El ojo derecho llena medio (1/2) aljibe al día, el izquierdo 1/3, el pie 1/4, y el hocico llena 4 estanques en un día. Si manan los cuatro se suman

$$1/2 + 1/3 + 1/4 + 4$$

dando 61/12. Las cuatro fuentes arrojan 61/12 del estanque en un día.

El tiempo buscado es la fracción inversa: 12/61.

Problema 7: La herencia

En la Antología Palatina es el 11:

> Las mil estateras que tengo,
> a mis dos hijos dejo en herencia.
> La quinta parte de lo dado a mi legítimo hijo
> sobrepasa en diez la cuarta parte de la suma
> que debe recaer en mi otro hijo.

Contexto histórico y mitológico

La *estatera*, el dracma y la mina son monedas y unidades de peso alejandrinas. La estatera era de oro o de plata. El dracma era de plata, y pesaba entre 2 y 4 gramos. La mina era de mayor valor, y equivalía a 100 dracmas.

El ejercicio es algo más complejo que los anteriores: nos está pidiendo el uso del álgebra. Si bien se puede resolver —como veremos— con pura aritmética elemental.

Solución: El hijo legítimo recibe 5200/9 estateras, y el bastardo hereda 3800/9 estateras.

Dracma de Khusru I 531–579 a.C.

Si la quinta parte del legítimo sobrepasa en 10 la cuarta parte de la herencia del otro, la parte completa sobrepasará en 50 los 5/4 de la del otro. Si sumamos 5/4 a la unidad son 9/4. La parte del bastardo son $(1000 - 50) \cdot 4/9$ y el resto hasta mil corresponde a su hermano legítimo.

Solución algebraica:

x : herencia del legítimo.

y : herencia del bastardo.

Sistema de ecuaciones:

$$x + y = 1000$$

$$(1/5)\, x = 10 + (1/4)\, y$$

Y de aquí se obtiene la solución.

Problema 8: El rico rey Creso

En la Antología Palatina es el 12:

> El rey Creso ha consagrado seis copas,
> seis minas en total.
> Cada vasija pesa un dracma mas que su vecina.

Contexto histórico y mitológico

Creso fue el último rey de Lidia en Asia Menor desde 561 a 547 a.C. La historia recuerda a Creso como el prototipo de rey rico que explotó el comercio y las minas de oro. Su reino fue conquistado por el persa Ciro.

El dracma y la mina son monedas y unidades de peso alejandrinas como se expuso en el problema anterior. Una mina equivalía a 100 dracmas.

Solución: La más ligera pesa 97,5 dracmas y la más pesada 102,5 dracmas.

En el ejercicio, aparte de las fracciones, estamos ante una progresión aritmética. Si la primera copa pesa una cantidad, la siguiente será lo mismo más uno, y así sucesivamente. De forma que el total es seis veces la más ligera más la suma de

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

que es 15.

Por tanto seis veces la menos pesada es $6 \cdot 100 - 15 = 585$ dracmas.

De aquí se calcula que la primera copa pesa $585/6 = 97{,}5$ dracmas.

La forma mas elegante de resolver el problema es tomar la copa media que es 100 dracmas; como hay número par, las dos copas intermedias pesan 99,5 y 100,5 dracmas.

Copa medieval

Problema 9: Los gemelos Zeto y Anfión

En la Antología Palatina es el 13:

> Entre mi hermano y yo, Zeto,
> pesamos veinte minas.
> Si tomas la tercera parte de mi peso,
> y la cuarta de Anfión, juntándolos
> el peso de nuestra madre tendrás,
> seis minas en total.

Contexto histórico y mitológico

Zeto y *Anfión* fueron hermanos gemelos hijos de Zeus y Antíope.

Al ser repudiada la madre por su marido Lico –rey de Tebas– los hermanos conquistaron la ciudad.

La reconstrucción de Tebas la realiza Zeto al ritmo marcado por la flauta de Anfión.

Tebas es la ciudad clave de la mitología griega.

Solución: Zeto pesa 12 minas y Anfión 8.

Hoy es un clásico ejercicio de solución algebraica.
x es el peso de Zeto, por ello el de Anfión es $20 - x$.

Y como

$$1/3\, x + 1/4\, (20 - x) = 6$$

se obtiene que

$$(1/3 - 1/4)\, x = 1$$

y restando fracciones

$$1/3 - 1/4 = 1/12$$

Luego

$$x = 12$$

Las tres Gracias, de la primavera (1477)
de Sandro Botticelli

Problema 10: Las Gracias

En la Antología Palatina es el 48:

> Las Gracias cargaban cestas con manzanas.
> Las tres llevaban igual número de fruta.
> Una tras otra se encontraron con las nueve musas
> y se repartieron el peso.
> Al final todas –Musas y Gracias– terminan con la misma cantidad.
> Di cómo pudo ser.

Contexto histórico y mitológico

Las Gracias eran hijas de Zeus y de Eurínome. *Aglae*, *Eufrosina* y *Talía* representan la belleza y la armonía física y espiritual.

Las Gracias vivían en el Olimpo, donde también habitaban las Musas.

Monte Olimpo. Grecia

Solución: Estamos ante lo que hoy conocemos como ecuación diofántica. Por ello hay infinitas soluciones. La más sencilla es que cada Gracia empieza con doce manzanas y termina con tres.

Pero de igual forma pueden empezar con 24 y terminar con 6 manzanas, o empezar con 36 y terminar con 9, y así hasta una cantidad imposible de ser cargada.

Se tiene que cumplir que la cantidad que tiene cada Gracia antes de repartir con las Musas (x) sea como mínimo 9 para poder dar una a cada Musa más la cantidad final (y) de todas.

En forma algebraica:

$$3x = 12y$$
$$x = 9k + y$$

Luego

$$y = 3k$$
$$x = 12k$$

Siendo k un factor entero mayor que 1, y que nos da todas las soluciones. ■