SUMA 53
Noviembre 2006, pp.13-18

El curioso incidente entre las Matemáticas y la Literatura

A partir de la novela El curioso incidente del perro a medianoche *de Mark Haddon, en la que se plantean diversos temas matemáticos, proponemos una serie de actividades para el alumno. A través de este trabajo se trata de demostrar que la Literatura no es ajena a las Matemáticas, además de animar a la lectura y enseñar temas matemáticos de interés en la actualidad como la Criptografía de Clave Pública, la Teoría de la Probabilidad y la Teoría del Caos, que son aplicables a problemas del mundo real.*

Corcerning the novel The curious incident of the dog in the night-time *by Mark Haddon, we will propose several mathematical topics and we will suggest different types of exercises for the student. Through this we are trying to show the student that Literature and Maths are not too distant from each other. Besides, we will be stimulating students to read and learn mathematical topics of today such as: Key Public Criptography, Probability Theory and Chaos Theory by doing this we will broaden the use of mathematics in every day life.*

¿Existe algún otro detalle acerca del cual desearía usted llamar mi atención?

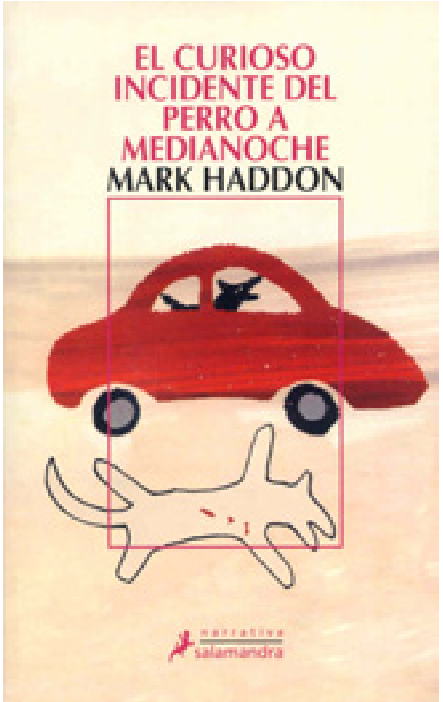
— Sí, acerca del incidente curioso del perro aquella noche.

— El perro no intervino para nada.

— Ése es precisamente el incidente curioso –dijo como comentario Sherlock Holmes.

Silver Blaze. Memorias de Sherlock Holmes.

En septiembre de 2004 se publicó la primera edición de un magnífico libro titulado *El curioso incidente del perro a medianoche* escrito por Mark Haddon y que ha sido objeto de una reseña en el n.º 51 de la revista SUMA, en la sección *Biblioteca*, apartado *En campo ajeno*. En dicha reseña se proponen tres temas matemáticos para trabajar en clase, de los cuales solo uno coincide con los propuestos en este trabajo. El título del libro que alude a la anterior conversación entre el inspector Gregory y Sherlock Holmes ya nos indica que se trata de una novela de intriga, en la que el protagonista Christopher Boone, un adolescente con problemas de autismo, decide investigar quién asesinó a Wellington, el perro de su vecina, y escribir un libro con sus investigaciones. De esta forma llegará a descubrir secretos que afectan a su propia familia y a la idea que tiene sobre el mundo. Además el libro contiene varias referencias a las Matemáticas y a la Física, ya que Christopher quiere ser de mayor matemático o físico y demuestra una gran capacidad e interés por estas disciplinas.



Natalia Casás Ferreño
IES Ingenio. Ingenio. Las Palmas

Creemos que es un libro interesante para utilizar en el aula en secundaria por varios motivos: trata una temática juvenil y está narrado en un lenguaje sencillo a través de un adolescente. Por otra parte, a partir de este texto se pueden desarrollar diferentes cuestiones relacionadas con las Matemáticas que esperamos resulten interesantes a nuestros alumnos.

La actividad que proponemos consiste en la selección de tres temas matemáticos: los números primos, el problema de Monty Hall y la teoría del caos, que son tratados en el libro. Realizamos una revisión crítica del tratamiento que se le da a estos temas, haciendo reflexionar al alumno sobre lo que ha leído. Posteriormente se amplía la información sobre cada tema animando al alumno a buscar nueva información y a experimentar por su cuenta, utilizando también Internet como recurso didáctico.

Esperamos que este trabajo, al igual que otros muchos que se han ido publicando a lo largo de este IV centenario del Quijote, ponga de manifiesto la relación existente entre matemáticas y literatura, eliminando el muro invisible que se levanta entre ambas disciplinas. De este modo enseñaremos a nuestros alumnos que no tiene sentido decir:

— yo soy de letras

o

— yo soy de ciencias.

Basta considerar que hay varios matemáticos que han ganado el premio Nobel de Literatura y que por otra parte existen periodistas, escritores y cineastas que han desarrollado con gran éxito temáticas científicas.

Los números primos

Fíjate en la numeración de los diferentes capítulos del libro: 2, 3, 5, 7, 11... Ésta es la secuencia de los números primos. Un número primo es cualquier número natural distinto de 1 que solo es divisible por 1 y por sí mismo. Todos los números primos mayores que 2 son impares *–¿por qué?–* pero no todos los números impares son primos, por ejemplo 9 = 3 x 3 y por tanto no es primo. Todo número es o bien primo o bien divisible por un número primo más pequeño. Euclides ya sabía hace más de 2000 años que los números primos eran infinitos; una demostración sencilla por reducción al absurdo es la siguiente: supón que sólo existe un número finito de números primos, $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ y considera entonces el número

$$M = (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n) + 1$$

Está claro que M no es divisible por ninguno de los números primos p_i, $i = 1, \ldots, n$ porque el resto es 1 *–probar con distintos números–*. Ahora solo hay dos opciones: o bien M es un número primo, lo cual no es posible porque es mayor que cualquier p_i, o bien M es divisible por algún primo que pertenece a la lista de los p_i y ya vimos que esto tampoco es posible. Entonces llegamos a una contradicción y esto nos indica que existen infinitos números primos.

Eratóstenes
(Cirene, 276 a.C. – Alejandría, 195 a.C.)

Actividad

Experimenta para los 2, 3 y 4 primeros números primos cuál es el número M que se obtiene. ¿Es M primo en estos tres casos?

En el capítulo 19 (página 22) Christopher te explica una regla para calcular los números primos conocida como Criba de Eratóstenes, en honor al matemático griego Eratóstenes de Cirene (276-194 a.C.):

> Primero escribes todos los números enteros positivos del mundo.

–¿Es eso posible?–

> Entonces quitas todos los números múltiplos de 2. Después los números múltiplos de 3. Después los números múltiplos de 4 y 5 y 6 y 7 y así sucesivamente. Los números que quedan son los números primos.

Actividad

Calcula los números primos menores que 100 utilizando la criba de Eratóstenes. Una vez que has eliminado los números múltiplos de 2 y de 3, ¿es necesario eliminar los múltiplos de 4 y 6 como afirma Christopher?

Fíjate que al llegar a un primo mayor que $\sqrt{100}=10$ todos los números que quedan son primos. En general, si quieres calcular los primos menores o iguales que un número *n* el proceso de la criba termina al sobrepasar $\sqrt{n}$ –*¿por qué?*–.

A pesar de su sencillez la criba de Eratóstenes sigue siendo hoy en día el algoritmo más eficiente para calcular todos los números primos menores o iguales que un cierto *n*. Curiosamente no se conoce ninguna fórmula que genere todos los números primos o incluso que genere solo números primos. Por ejemplo, Fermat pensaba que todos los números de la forma

$$2^{2^n}+1$$

eran primos.

En un principio la fórmula parece que funciona porque

$$2^{2^1}+1=5$$

$$2^{2^2}+1=17$$

$$2^{2^3}+1=257$$

$$2^{2^4}+1=65537$$

son primos. Sin embargo, en este caso, la genial intuición de Fermat, el príncipe de los matemáticos aficionados, le jugó una mala pasada pues ya el gran matemático del siglo XVIII Leonhard Euler probó que la fórmula fallaba para $n = 5$ y desde entonces no se ha vuelto a encontrar ningún otro número primo de la forma

$$2^{2^n}+1$$

distinto de los cuatro primeros –*¿Eres capaz de encontrar los factores primos del número*

$$2^{2^5}+1=4294967297 \text{ ?–}$$

Para apreciar el gran mérito de Euler piensa que en esa época no existían las calculadoras y mucho menos los ordenadores.

Un poco después Christopher dice:

> Si un número es muy, muy grande, a una computadora puede llevarle años calcular si es un número primo.

Esto no es completamente cierto. Existen dos problemas diferenciados: uno es factorizar un número (descomponerlo en los números primos de los cuales es producto) y el otro es probar que un número es primo. Por ejemplo, factorizar un número que es producto de dos primos muy grandes resulta hoy en día un problema muy complicado, en el sentido de que le llevaría una gran cantidad de tiempo incluso a los ordenadores actuales más potentes. Sin embargo para probar que un cierto número es primo existen métodos probabilísticos que de una forma rápida y con una alta probabilidad nos informan de este hecho. No obstante, hay que tener en cuenta que son métodos probabilísticos, lo cual quiere decir que teóricamente podría fallar pero en la práctica eso no sucede casi nunca.
Una aplicación reciente e interesante de los números primos es que *sirven para crear códigos*. Por ejemplo el criptosistema de clave pública RSA, que debe su nombre a los ingenieros del MIT (Instituto tecnológico de Massachussets) R. Rivest, A. Shomer y L. Adleman que lo propusieron en 1978, basa su seguridad en la dificultad de factorizar números que son producto de dos números primos grandes.

Actividad

Consulta en las siguientes páginas web en qué consiste el criptosistema de clave pública RSA, cuáles son sus principales ventajas e inconvenientes y explica por qué los números primos son importantes para este sistema.

http://www.uam.es/proyectosinv/estalmat/Estalmat/susipablo02.pdf

http://www.galileo.it/crypto/teletrabajo/la_encriptacion.html

Lecturas recomendadas

Encontrarás una excelente introducción al sistema RSA en el capítulo 17 de (De Guzmán, 1995) escrito en un lenguaje muy accesible y con varios ejemplos. Para una explicación más avanzada, con muchas más matemáticas, pero también amena puedes consultar (Gómez Pardo).

El problema de Monty Hall

En el capítulo 101 (página 86), Christopher explica un problema aparentemente sencillo, pero con una solución sorprendente que engaña a la intuición, el problema de Monty Hall (llamado así en honor al presentador de un famoso concurso de televisión en Estados Unidos): el concursante de un programa televisivo debe elegir entre tres puertas. Una de ellas encierra un coche y las otras dos una cabra. Una vez que el concursante ha elegido una puerta, el presentador siempre abre otra puerta donde él sabe que hay una cabra y da al concursante la oportunidad de cambiar la puerta elegida en un principio. La pregunta es: ¿debe el concursante cambiar de puerta o no?

Intuitivamente parece que el hecho de cambiar o no cambiar es indiferente y que en ambos casos la probabilidad de ganar es 1/2. Sin embargo, Christopher te demuestra mediante dos razonamientos diferentes que el concursante duplica su probabilidad de ganar si cambia de puerta. Efectivamente, si no cambias de puerta ganas solamente si al principio has elegido la puerta que contiene el coche, por tanto tu probabilidad de ganar es 1/3. Por el contrario, si cambias de puerta ganas si originalmente habías elegido una cabra, y por tanto tu probabilidad de ganar es de 2/3.

El conocido divulgador de las matemáticas Ian Stewart ha escrito lo siguiente acerca del problema de Monty Hall:

> Cuando hace algunos años escribí acerca del problema me llegó la saca de correo más grande que nunca haya recibido: la gran mayoría de las cartas me decían que yo estaba equivocado. Y cuando mencioné el problema en un programa radiofónico pocos años después, sucedió más de lo mismo. (…) Mucha gente tiene una intuición simple y poderosa acerca del problema. Esta intuición es errónea, pero no es en absoluto obvio por qué es errónea.

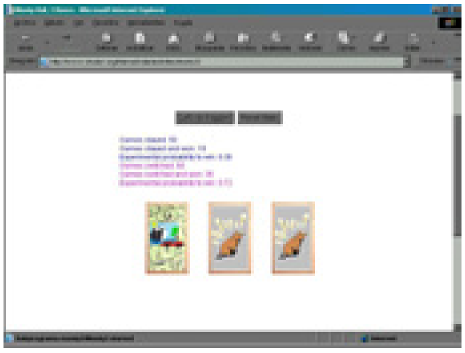
Aquí reside el principal interés del problema de Monty Hall: la intuición parece engañarnos en la búsqueda de su solución, pero si lo analizamos en profundidad y tenemos en cuenta todas las condiciones del enunciado la lógica nos permite obtener la respuesta correcta.

Actividad

Aunque la solución parece desafiar a la intuición, es correcta y puedes comprobarla experimentalmente en la página web

http://www.shodor.org/interactivate/activities/monty3/

en la cual puedes simular el concurso cambiando de puerta y no cambiando.



Observa que para que la solución presentada sea correcta es fundamental que el presentador sepa lo que hay detrás de cada puerta y que siempre enseñe una cabra y dé la oportunidad de cambiar. En las siguientes variantes del juego modificamos ligeramente las reglas con el objetivo de que reflexiones y analices las diferencias.

Variante 1: Una vez que has elegido una puerta, el presentador lanza una moneda y según salga cara o cruz abre la puerta que está más a la izquierda o la puerta que está más a la derecha entre las dos que no has elegido. Si al abrir la puerta aparece el coche entonces has perdido mientras que si aparece una cabra se te da la opción de cambiar de puerta.

Variante 2: De las dos cabras una está pintada de rojo y la otra de azul. Una vez que has elegido una puerta, el presentador siempre abre la que encierra la cabra roja. Si es tu puerta el juego se acaba y si no el presentador te da la opción de cambiar la puerta.

Actividad

En ambas variantes, ¿debe ahora el concursante cambiar de puerta o no?, ¿cuál es la probabilidad de ganar si cambia?, ¿y si no cambia?. Sabiendo que no es eliminado en la primera ronda ¿qué probabilidad tiene de ganar cuando cambia?, ¿y cuando no cambia?

Lecturas recomendadas

En el capítulo VI de (Hoffman, 2000) puedes descubrir una deliciosa historia de cómo el problema de Monty Hall pareció resistírsele al mismísimo Paul Erdös, uno de los más grandes y peculiares matemáticos del siglo XX.

Monty Hall

Las matemáticas del caos

En el capítulo 151 (página 131), Christopher nos muestra una gráfica de cómo aumenta y disminuye la población de ranas que vive en el estanque de su colegio. El gráfico que representa la población es totalmente irregular. Sin embargo eso no quiere decir que no exista una regla que determine cómo evoluciona la población de ranas. El estudio del caos determinista ha puesto de manifiesto qué comportamientos dinámicos muy complejos, aparentemente impredecibles, pueden obedecer a reglas muy sencillas.

Por ejemplo, vamos a pensar un poco más en la ecuación logística que describe Christopher:

$$f(x)=\lambda\cdot(1-x)\cdot x$$

donde $\lambda > 0$ es una constante también llamada parámetro.

Actividad

a. Dibuja la parábola $f(x) = \lambda(1 - x)x$, calculando su vértice para los siguientes valores de lambda: $\lambda = 2$, $\lambda = 4$ y $\lambda = 6$ ¿Qué aspectos tienen en común las tres parábolas?

b. Sea cual sea el valor de $\lambda>0$, ¿cuál es el vértice de $\lambda(1-x)x$?

c. Prueba que si $0 < \lambda < 4$ y $0 < x < 4$, entonces $f(x)$ también pertenece al intervalo [0, 1].

A partir de ahora fijamos $0 < \lambda \leq 4$ y consideramos el sistema dinámico discreto definido por la función

$$f:[0,1]\rightarrow[0,1]$$

$$f(x)=\lambda\cdot(1-x)\cdot x$$

$$\begin{cases} x_0\in[0,1]\text{ dado} \\ x_{n+1}=f(x_n)\text{ cuando } n=1,2,3,\ldots \end{cases}$$

De este modo a partir de un x_0 inicial obtenemos la sucesión x_n iterando la función *f*. –*¿Por qué podemos calcular siempre* x_n *para cualquier* n?– Si la *f* representa cómo evoluciona la población de ranas a partir de la población inicial x_0, la población en el año siguiente será $x_1 = f(x_0)$, en el siguiente $x_2 = f(x_1)$, y así sucesivamente.

Podemos representar gráficamente la anterior sucesión del siguiente modo:

1.- Dibujamos la parábola $f(x) = \lambda(1 - x)x$ dentro del cuadrado de lado unidad [0, 1] x [0, 1].

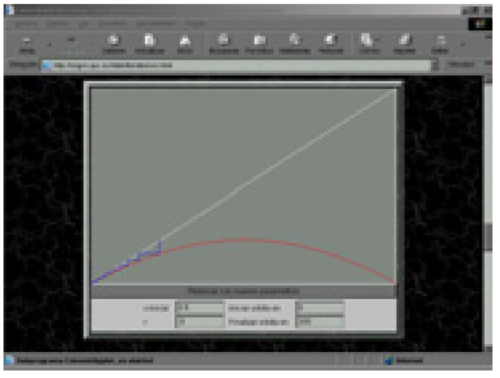
2.- Dibujamos la función identidad $y = x$.

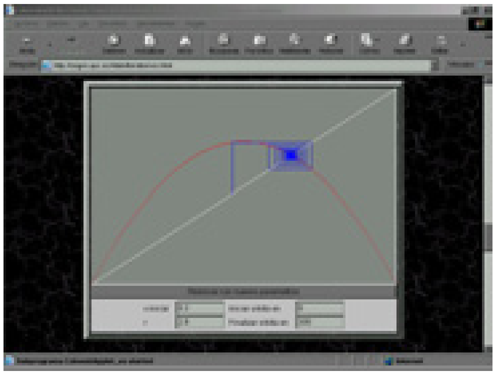
3.- Situamos el punto x_0 sobre el eje de abscisas y levantamos una recta vertical y paralela al eje de ordenadas hasta tocar con la parábola, este punto de corte será $f(x_0)$. Tal y como hemos definido la sucesión x_n, se tiene que $x_1 = f(x_0)$. Ahora trazamos desde $f(x_0)$ una recta paralela al eje de abscisas y una vez que corte con la función identidad $y = x$, trazamos desde ahí una recta paralela al eje de ordenadas hasta cortar de nuevo con la parábola $f(x) = \lambda(1 - x)x$ obteniendo de este modo el punto $x_2 = f(x_1)$. Ahora basta repetir este procedimiento sucesivamente.

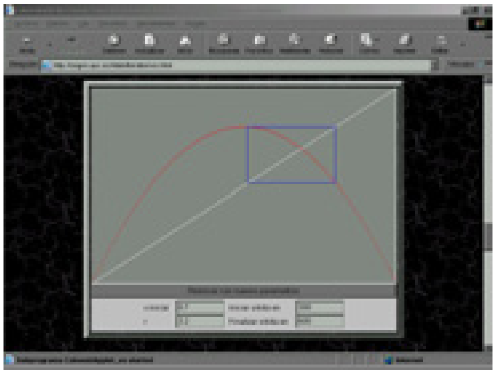
Actividad

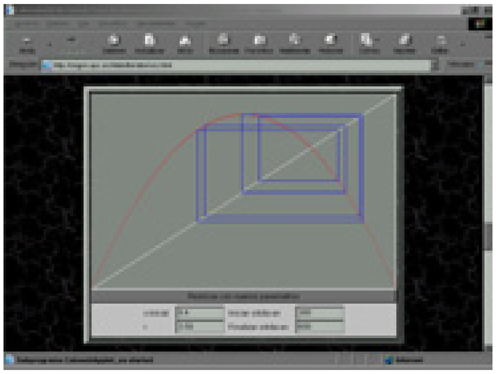
Aunque el proceso anterior es un poco latoso para hacerlo a mano resulta muy fácil utilizando un ordenador. Puedes simular el comportamiento de la sucesión x_n mediante estos diagramas de *telas de araña* eligiendo distintos valores del parámetro λ y del iterante inicial x_0 en la página web

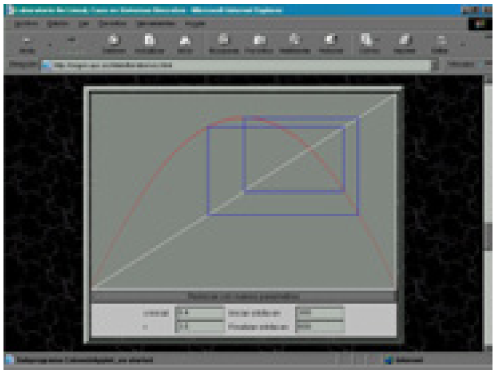
http://segre.upc.es/nllab/iterated-es.html

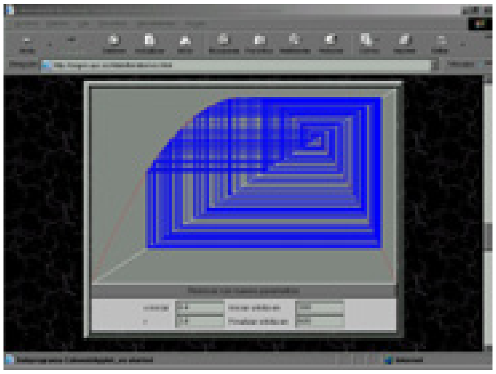












La teoría del caos ha supuesto un nuevo paradigma científico, en el que los sistemas deterministas, al igual que los aleatorios, también pueden ser impredecibles.

Pero ¿dónde aparece el caos?, ¿cómo puede ser impredecible o caótico un sistema determinista? La respuesta está en la sensibilidad a las condiciones iniciales, más conocido popularmente como efecto mariposa. Este último nombre procede de la conferencia que en 1972 dio el meteorólogo Edward Lorenz, titulada *Predecibilidad: ¿puede el aleteo de una mariposa en Brasil desencadenar un tornado en Texas?* La idea es que aunque tengamos un modelo matemático que nos diga de forma exacta cómo evoluciona el tiempo, para poder hacer una predicción necesitamos saber cuáles son las condiciones iniciales (presión atmosférica, temperatura, humedad, dirección del viento...) en un determinado momento. Sin embargo estas condiciones se conocen solo de forma aproximada (el aparato de medición comete un pequeño error, al igual que una calculadora que sólo admite un número finito de dígitos), y por tanto si el sistema es sensible a las condiciones iniciales este pequeño error se amplifica con el tiempo hasta que se convierte en un error enorme, haciendo imposible la predicción. Esto explica por qué el hombre del tiempo acierta en su pronóstico solamente para uno o dos días, pero no puede hacer predicciones a largo plazo (cinco días, una semana, un mes...).

Lecturas recomendadas

En (Gleick, 1985) encontrarás una magnífica exposición de la creación de la teoría del caos dirigida al público no especialista. El capítulo 15 de (De Guzmán, 1985) constituye una excelente introducción al efecto mariposa y al caos en sistemas dinámicos discretos. Finalmente si quieres saber un poco más sobre las dificultades de predecir el tiempo atmosférico puedes leer (Brookes, 2005). ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BROOKES, T. (2005): “Predicción del tiempo”, *National Geographic España*, Junio 2005, 86-105.

DE GUZMÁN, M. (1995): *Aventuras matemáticas*, Pirámide, Madrid.

GLEICK, J. (1986): *Caos: la creación de una ciencia*, Seix Barral, Barcelona.

GÓMEZ PARDO, J.L. (2001): “Aspectos computacionales de los números primos (I)”, *La Gaceta de la R.S.M.E.*, Vol. 4, n.º 3, 649-673.

GÓMEZ PARDO, J.L. (2002): “Aspectos computacionales de los números primos (II)”, *La Gaceta de la R.S.M.E.*, Vol. 5, n.º 1, 197-227.

GÓMEZ PARDO, J.L. (2002): “Criptografía y Curvas elípticas”, *La Gaceta de la R.S.M.E.*, Vol. 5, n.º 3, 737-777.

HOFFMAN, P. (2000): *El hombre que sólo amaba los números*, Granica, Barcelona.