

El Método: una carta reveladora de Arquímedes a Eratóstenes



Palimpsesto con el Método de Arquímedes, debajo de una Biblia

Hace 100 años, el investigador Heiberg tuvo conocimiento de un palimpsesto, esto es, un pergamino al que se había lavado un primer escrito para ser utilizado con un nuevo texto, de contenido matemático, que se había encontrado en el convento del Santo Sepulcro de Constantinopla.

Examinado el documento con las técnicas fotográficas correspondientes, descubrió Heiberg que, además de otras obras de Arquímedes, el pergamino contenía nada menos que una carta de éste dirigida a Eratóstenes, en la que le comunicaba con ejemplos concretos el método de trabajo utilizado por él en sus hallazgos matemáticos. El documento se conservó gracias a que unos monjes del siglo XIII lo habían reciclado con sus textos litúrgicos, sobre el texto de Arquímedes que era copia, realizada en el siglo X, de una versión anterior.

Este documento fue adquirido, tras la primera guerra mundial, por una familia francesa que lo conservó hasta 1998, año en que lo vendió en pública subasta en la ciudad de Nueva

York. A pesar de los esfuerzos del gobierno griego por recuperarlo fue adquirido finalmente por un coleccionista norteamericano, que no ha querido revelar su identidad, aunque expresó su deseo de que el texto en cuestión estuviera a disposición de todo aquél que quisiera consultarlo.

Pero, ¿cuál era la importancia de este escrito, tan solo una simple carta?

Santiago Gutiérrez
hace.suma@fespm.org



Arquímedes, pintado por Ribera en 1630,
Museo del Prado

La personalidad de Arquímedes

Natural de Siracusa, era hijo, según él mismo manifiesta en su obra *El Arenario*, del astrónomo Fidias. El historiador Tzetzes afirma:

...trabajó en geometría hasta edad avanzada, viviendo 75 años

De aquí se deduce que debió nacer hacia el año 287 a.C. Al parecer era amigo y consejero, quizá pariente, del rey Hierón II, quien sacó buen partido de su ingenio orientándolo hacia la ingeniería militar. Precisamente, *El Arenario* está dedicada a Gelón, hijo de Hierón.

Arquímedes visitó la escuela de Alejandría, y probablemente allí trató con discípulos de Euclides, pero pronto regresó a Siracusa, donde transcurrió la mayor parte de su vida. Sin embargo, se mantuvo en contacto epistolar con los matemáticos y astrónomos del Museo que merecían su confianza, sobre todo con Dositteo, Conon de Samos y Eratóstenes, este último director del Museo desde el año 235 a. C.

De regreso a Siracusa, se ocupó de muy variadas cuestiones en materias tan diversas como Geometría, Aritmética, Hidrostática, Mecánica y Astronomía. Y lo hacía con tal afán que Plutarco decía de él:

...siempre hechizado como por una particular sirena en su propio interior, se olvidaba de comer y beber, y a menudo se le debía arrastrar por la fuerza a los baños y ungüentos. Totalmente cautivado por felicísimas sensaciones y realmente poseído por su musa matemática.

Es posible que visitara también Egipto y que fuera allí donde dejara constancia de su talento técnico con una especie de tornillo (*κοχλίτᾶσ*) que servía para extraer agua de las profundidades, lo que facilitaba la irrigación de las tierras de cultivo.

Según la leyenda, el rey Hierón le propuso idear algún procedimiento para ver si la corona de oro que le había encargado al joyero contenía o no la proporción de oro prevista en el encargo, pero sin necesidad de destruir la corona. Se cuenta que Arquímedes, estando en la bañera, descubrió de pronto el procedimiento que le permitía resolver el problema, y fue tal su emoción que saltó de la bañera gritando *Eureka, eureka (Lo encontré, lo encontré)*. Había descubierto ni más ni menos que el bien conocido principio hidrostático:

Cualquier sólido más ligero que un fluido y situado en él, se sumergirá hasta el punto en que el peso del sólido sea igual al peso del fluido desalojado.

...descubrió Heiberg que, además de otras obras de Arquímedes, el pergamino contenía nada menos que una carta de éste dirigida a Eratóstenes, en la que le comunicaba con ejemplos concretos el método de trabajo utilizado por él en sus hallazgos matemáticos.

Lo que acabó por convertir a Arquímedes en un personaje de leyenda fue la defensa que hizo de su ciudad durante el asedio de Roma, en el transcurso de la segunda guerra púnica.

Parece ser que con un juego de poleas fue capaz de botar un enorme barco con la única fuerza de su brazo, con la famosa leyenda:

Dadme un punto de apoyo en el universo y moveré la Tierra.

Se dice de él que mediante unos grandes espejos concentró los rayos solares sobre las naves romanas, consiguiendo incendiarlas. También se cuenta que, utilizando la ley de la palanca, lanzaba enormes piedras, desde grandes catapultas, sobre las naves.

He creído oportuno confiarte por escrito, y explicar en este mismo libro, las características propias de un método según el cual te será posible abordar la investigación de ciertas cuestiones matemáticas por medio de la mecánica.

Arquímedes, Carta a Eratóstenes

Esto ocurría allá por los años 214 a 212 a.C. Quiso el destino que cuando las tropas romanas, al mando del general Marcelo, consiguieron entrar en Siracusa, después de dos años de lucha, Arquímedes encontrase la muerte, en el año 212 a. C., a manos de un soldado romano, a los 75 años de edad, pese a la orden que el propio Marcelo había dado de que lo llevaran vivo a su presencia. Su muerte se ha revestido de múltiples leyendas, desde la que dice que murió mientras hacía figuras con un bastón sobre la arena de su jardín, hasta la que sostiene que tan solo fue una víctima más del saqueo que se produjo a la entrada de las tropas romanas, pasando por la que pone en su boca la frase que le dijo al soldado romano: *No desordenes mis círculos*, a continuación de lo cual el soldado le habría dado muerte.



De estas y otras gestas nos hablan los historiadores romanos, aunque casi todas son difíciles de probar. Pero, no importa,

podemos aplicarles el proverbio italiano “*Si non e vero e ben trovato*”. Es decir, si no son verdad sirven para hacernos una idea del impacto que su personalidad había producido tanto en sus contemporáneos, amigos y enemigos, como en todos cuantos posteriormente tenían noticia de su talento. No deja de ser una pena que se haya perdido la biografía escrita por su coetáneo Herakleides.

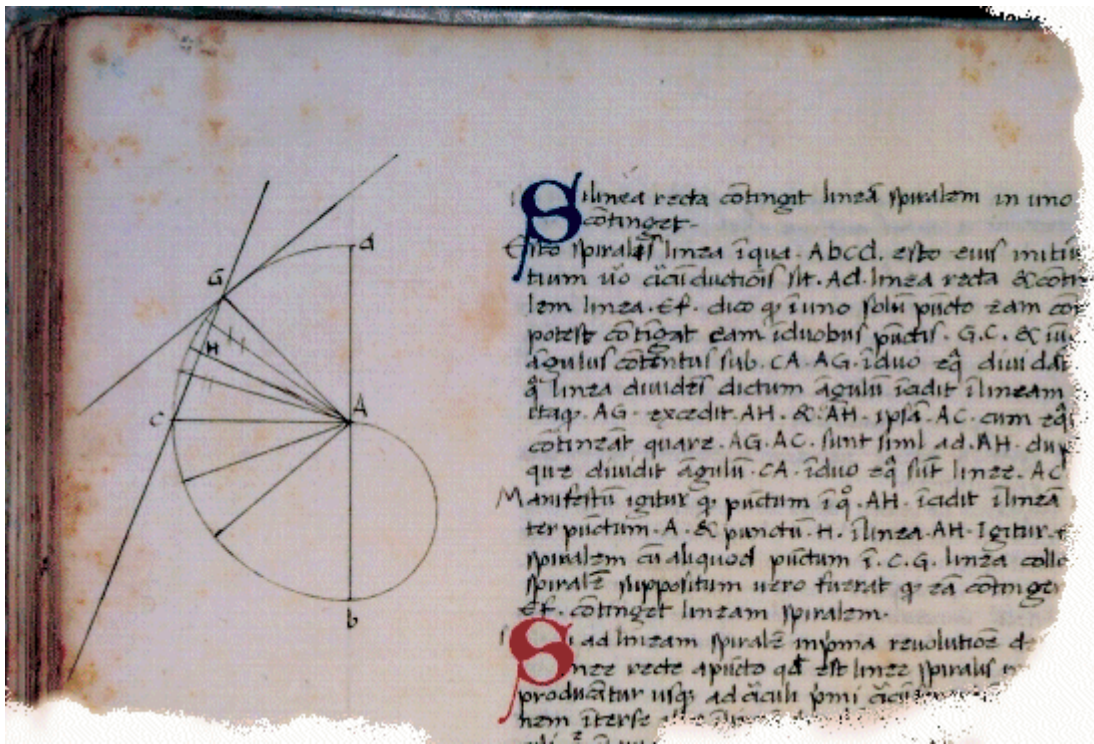
La obra

A pesar de su éxito como ingeniero y como inventor, lo que verdaderamente interesaba a Arquímedes era la ciencia pura, incluso cuando trataba de sus inventos con palancas y otras máquinas simples su espíritu se iba más a los principios generales que a las aplicaciones prácticas. En realidad daba poco valor a sus inventos prácticos, según relatan los historiadores. De hecho, sus escritos corresponden a la obra teórica y en nada hacen referencia a la práctica. Como dice Plutarco:

...Estaba en posesión de un espíritu tan alto, un alma tan profunda y una riqueza tal de conocimientos que a pesar de que estos inventos le habrían proporcionado la celebridad de tener más que sabiduría humana, consideraba que dichos trabajos eran innobles y viles como todo trabajo mecánico y todo tipo de arte que se puede usar y aprovechar directamente, y por ello centró su mayor ambición en aquellas especulaciones cuya belleza y sutileza no añaden nada a las necesidades habituales de la vida.

Escribió más de diez obras que, siguiendo a los críticos actuales, podemos clasificar del siguiente modo:

1. *Primer libro de los equilibrios*, sobre los centros de gravedad, los paralelogramos y los triángulos.
2. *Cuadratura de la parábola*, sobre la cuadratura de un segmento parabólico, con un prólogo dirigido a Dositeo. Al problema planteado en este libro le da Arquímedes dos soluciones, una mecánica y otra geométrica.
3. *Segundo libro de los equilibrios*, sobre los centros de gravedad de los segmentos de parábola.
4. *Sobre la esfera y el cilindro I y II*. Aporta aquí resultados interesantes, entre los que destacan el que la superficie esférica es cuatro veces la de su círculo máximo, o que si una esfera está inscrita en un cilindro de altura igual al diámetro de la esfera, entonces tanto el volumen como la superficie total del cilindro son vez y media el volumen y la superficie de la esfera, respectivamente. Este resultado debió gustar de manera especial a Arquímedes, ya que pidió a los suyos que sobre su tumba representaran la figura de la esfera inscrita en el cilindro. Gracias a esta inscripción, en el año 75 a. C., Marco Tulio Cicerón, cuestor por entonces en Sicilia, pudo identificar la tumba de Arquímedes a pesar del estado ruinoso en que se encontraba.



Manuscrito de obras de Arquímedes,
 autógrafo de Piero della Francesca.
 Biblioteca Riccardiana. Florencia (Italia)

5. *Sobre las espirales*, donde trata de la conocida como “espiral de Arquímedes”, la figura engendrada por un punto que se mueve con velocidad constante sobre una semirrecta, radio vector, que a su vez gira con velocidad angular constante alrededor de su origen (de ecuación $r=a\theta$, en coordenadas polares). Aunque esta espiral debió ser descubierta anteriormente por Conon, y no por Arquímedes, a éste se debe el cálculo de la tangente en un punto cualquiera, así como el de las áreas barridas por el radio vector.
6. *Sobre los conoides y los esferoides*, donde trata de los volúmenes engendrados por las elipses, las parábolas y las hipérbolas al girar alrededor de un eje de simetría o del eje transversal en el caso de las hipérbolas.
7. *Medida del círculo*, sobre diversas relaciones entre perímetros y diámetros, entre áreas de círculos y cuadrados inscritos. En este escrito aparece una interesante aproximación del número π , como resultado de un trabajo de aproximación a la longitud de la circunferencia, por medio de polígonos regulares inscritos y circunscritos, de 3, 6, 12, 24, 48 y 96 lados. Tal aproximación da lugar al valor de π dado por la desigualdad:

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70}$$

8. *El Arenario*, que aporta un sistema de numeración para tratar con números muy grandes.
9. *Los cuerpos flotantes I y II*, donde expone su principio hidrostático y lo aplica al equilibrio de diversos cuerpos que flotan o se hallan sumergidos en un líquido.
10. *El método*, ya mencionado, y del que hablamos detenidamente a continuación.

El método

En el siglo XVI, cuando empezó a conocerse, la obra de Arquímedes asombraba de tal modo que alguien indicó si no habría dispuesto de un método especial con que lograr semejantes resultados. Se conocían las demostraciones, pero, ¿cómo hacía para establecer las hipótesis de trabajo de las que luego daba cumplida cuenta en sus demostraciones? La respuesta se hizo esperar, nada menos que hasta comienzos del siglo XX, en que el investigador danés Heiberg logró descifrar el pergamino de 185 páginas que contenía la carta a Eratóstenes. En ella explicaba así Arquímedes su propósito:

Reconociendo, como digo, tu celo y tu excelente dominio en materia de filosofía, amén de que sabes apreciar, llegando el caso, la investigación de cuestiones matemáticas, he creído oportuno confiarte por escrito, y explicar en este

mismo libro, las características propias de un método según el cual te será posible abordar la investigación de ciertas cuestiones matemáticas por medio de la mecánica. Algo que por lo demás, estoy convencido, no es en absoluto menos útil en orden a la demostración de los teoremas mismos. Pues algunos de los que primero se me hicieron patentes por la mecánica, recibieron luego demostración por geometría, habida cuenta de que la investigación por ese método queda lejos de una demostración; como que es más fácil construir la demostración después de haber adquirido por ese método cierto conocimiento de los problemas, que buscarla sin la menor idea al respecto...¹

Como se ve, Arquímedes hacía:

- a. Una exploración mecánica de la relación que deseaba establecer.
- b. Concluido un resultado plausible procedía a buscar la demostración geométrica.



Incluso la primera parte del proceso, la exploración mecánica, le servía no sólo, según dice, para establecer una conjetura, si no que le daba pistas también para la demostración geométrica posterior. Por lo demás, la carta adjunta varios ejemplos de su trabajo, y no se queda en una simple declaración de intenciones.

La exploración mecánica, consiste en lo siguiente:

Supongamos que se trata de hallar el área de una figura plana o el volumen de un determinado cuerpo. Representemos por A la figura o el cuerpo. Sea B otra figura o cuerpo cuyos área o volumen son conocidos, así como sus respectivos centros de gravedad. El método de exploración mecánica consiste, entonces, en pesar elementos muy pequeños (infinitesimales, diríamos hoy) de A en comparación con los correspondientes de B . Estos elementos muy pequeños son segmentos paralelos, en el caso de las figuras, o cilindros de altura muy pequeña, en el caso de los cuerpos, siendo paralelos los planos de las bases de todos ellos. Finalmente, equilibraba los elementos de A , colocados en un brazo de la balanza, con los elementos de

B , colocados en el otro brazo.

Tanto para las construcciones geométricas que sirven de base en sus exploraciones como las utilizadas en las demostraciones, los razonamientos de Arquímedes giran en torno a:

- la teoría de las razones y las proporciones,
- la teoría de los centros de gravedad,
- la teoría de equilibrios,
- algunos supuestos (a modo de postulados y definiciones),
- los teoremas ya probados,
- los métodos de comprensión y aproximación (una especie de exhaustión),
- la reducción al absurdo (sólo para las demostraciones).



Así de reveladora es la carta a Eratóstenes, a la sazón bibliotecario y director del Museo de Alejandría. Experimentación y observación, son los procesos que utilizaba antes de demostrar lo que, de lo contrario, se quedaría en meras conjeturas.



Arquímedes, considerado como el más grande matemático de la antigüedad, nos aporta de este modo los secretos de su forma de trabajo, cosa que tantos matemáticos nos niegan con frecuencia. No hay más que recordar el caso de Gauss, que según nos hacía observar Abel: *Es como el zorro, que borra con la cola sus huellas en la arena.* ■

NOTA

¹ Seguimos aquí la traducción directa del griego de M^a Luisa Puertas y Luis Vega en *Arquímedes: El método*, Ed. Alianza, 1986.