SUMA 48
Febrero 2005, pp. 23-32

Icosaedro y Φ

En el curso 1999/2000 nuestro Departamento realizó una actividad para conmemorar el Año Mundial de las Matemáticas. Dicha actividad trató sobre el estudio del icosaedro y su conocida construcción sobre tres rectángulos áureos ortogonales. Posteriormente, las firmantes del artículo retomamos el estudio desde una perspectiva más analítica. Intentando demostrar la unicidad de la construcción encontramos, sorprendentemente, que hay otra forma de intersecar los rectángulos generadora del poliedro. El artículo desarrolla la demostración y describe brevemente la actividad.

In the academic year 1999/2000 our Department performed an activity to commemorate the Mathematics World Year. This activity treated about the study of the icosahedron and its well-known construction on three perpendicular golden rectangles. Later we took the study again from a more analytic perspective. Trying to prove the uniqueness of the construction, we found surprisingly that there was another way to intersect the rectangles that could generate the polyhedron. This is what we have demonstrated in this article and described a bit the activity too.

Durante el curso académico 1999/2000, el Departamento de Matemáticas del Instituto de Enseñanza Secundaria Antonio García Bellido de León, del que somos profesoras, decidió realizar una actividad conmemorativa del Año Mundial de las Matemáticas.

Dicha actividad, que se describe en el apartado siguiente, trató sobre el estudio del icosaedro y su conocida construcción a partir de tres rectángulos áureos perpendiculares.

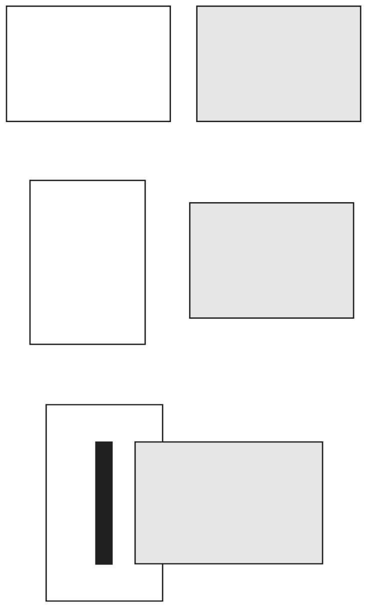
Las firmantes del artículo nos planteamos, posteriormente, retomar dicho estudio desde una perspectiva más analítica.

Intentando probar la unicidad de la construcción nos encontramos con la sorpresa de que había otra manera de cortarse los rectángulos generadora del poliedro, como demostraremos en este artículo.

Aunque los matemáticos tendemos a ordenar y axiomatizar nuestras exposiciones, vamos a intentar en este artículo mantenernos fieles también a la heurística de nuestro particular proceso.

Una curiosa construcción

a) Si cortamos perpendicularmente y oponiendo dimensiones dos rectángulos áureos iguales de la siguiente manera:



Ángeles Fernández García
Montserrat Prieto Morera
IES Antonio García Bellido. León.

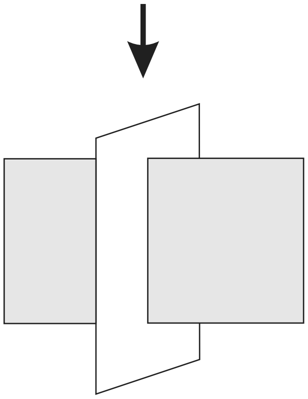


Figura 1

Resulta que al unir cada vértice de un rectángulo con los dos vértices más próximos del otro, se obtienen ocho nuevos segmentos iguales de longitud *a*, siendo *a* la dimensión menor de los rectángulos áureos;

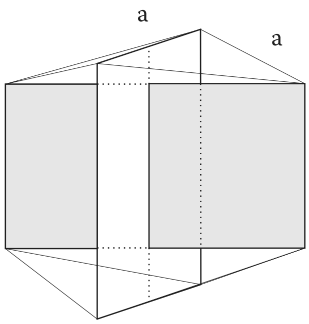


Figura 2

b) Repitiendo el proceso con un tercer rectángulo áureo igual a los anteriores, observamos que este nuevo rectángulo interseca a los otros de la misma manera:

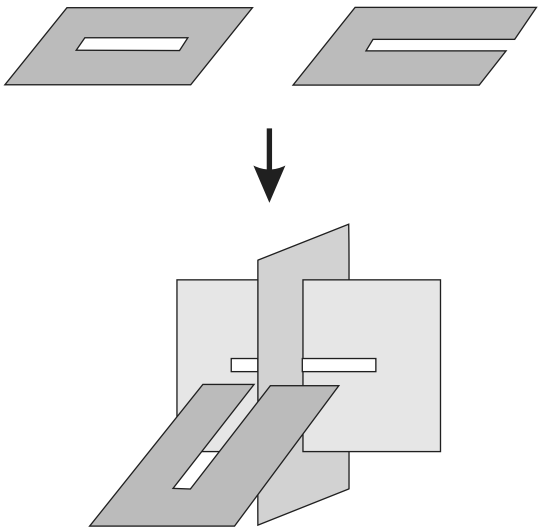


Figura 3

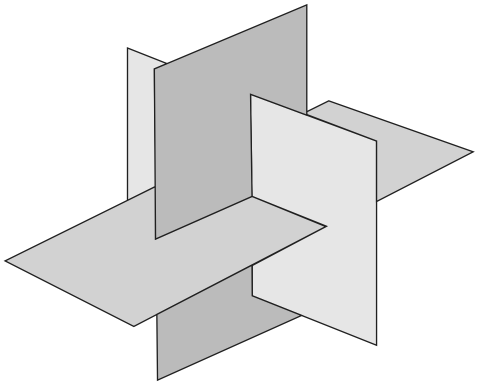


Figura 4

Ahora, se obtienen ocho segmentos del tercer rectángulo con el primero y otros ocho de la intersección del tercero con el segundo:

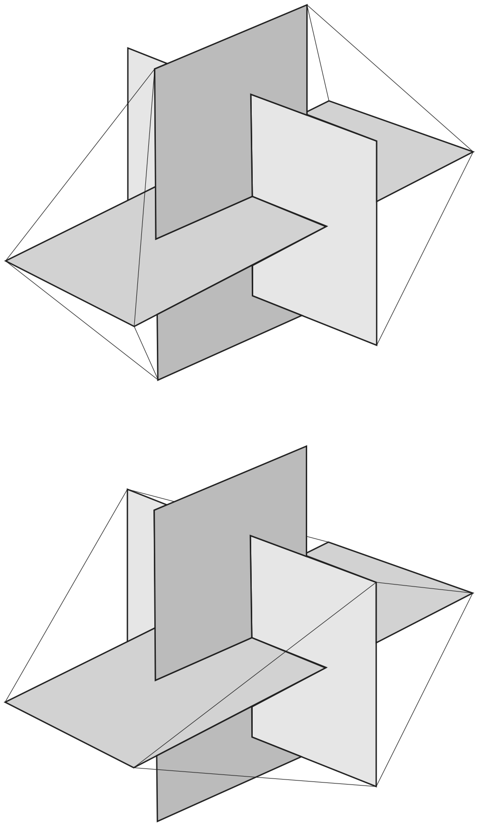


Figura 5

Es decir, llevamos 8x3 = 24 nuevas aristas de longitud *a* que con las 2x3 = 6 aristas también de longitud *a* de los tres rectángulos nos dan las 30 aristas iguales que forman 20 triángulos equiláteros y claramente sólo han hecho falta 12 (4x3) vértices (de forma sencilla se observa que en cada uno confluyen 5 aristas y solo una es lado de uno de los rectángulos).

[Nombre Griego. eikosaedron, De eikosi veinte + hedra asiento, base.]

De la lectura del libro Divina Proporción (Pacioli 1509), se deduce que ciertos geómetras de la época conocían las relaciones áureas en el icosaedro. Algunas de estas relaciones son la base de la conocida construcción anterior.

Demostración

Sea el rectángulo áureo de medidas: a y $a\phi$

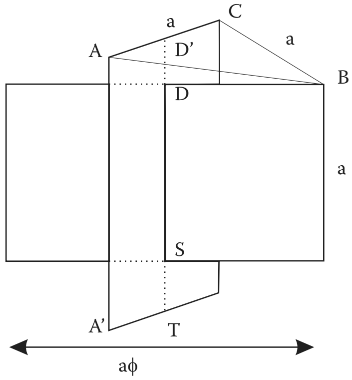


Figura 6

$$\overline{DD'} = \frac{\overline{D'T} - \overline{DS}}{2} = \frac{\Phi a - a}{2}$$

$$\overline{D'B}^2 = \overline{D'D}^2 + \overline{DB}^2 = \left(\frac{\Phi a - a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\Phi}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{2a^2\Phi^2 - 2a^2\Phi + a^2}{4} = \frac{a^2}{4}(2\Phi + 2 - 2\Phi + 1) = \frac{3}{4}a^2$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD'}^2 + \overline{D'B}^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} = a^2 \Rightarrow \overline{AB} = a$$

De la lectura del libro Divina Proporción (Pacioli 1509), se deduce que ciertos geómetras de la época conocían las relaciones áureas en el icosaedro.

Investiguemos el proceso anterior

Sea ahora un icosaedro de arista a.

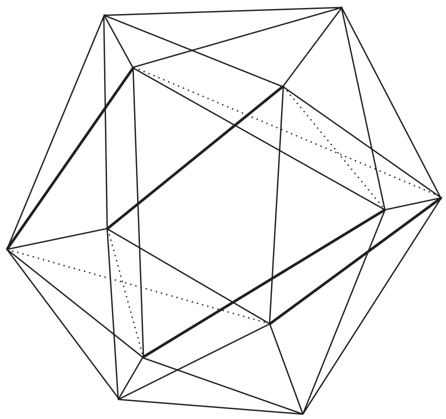


Figura 7

Enfrentemos aristas opuestas. Se forman rectángulos, cuyos lados menores son los lados del icosaedro, luego de medida a, y cuyos lados mayores son las diagonales de los pentágonos regulares que se forman con cinco caras del icosaedro que concurren en el mismo vértice, por lo tanto su medida es ϕa como comprobaremos al final de este apartado (el resultado es un clásico de la matemática). Así pues son rectángulos áureos.

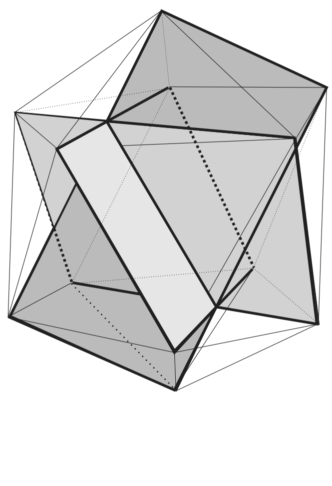
El icosaedro tiene 30 aristas; si las enfrentamos de dos en dos según acabamos de hacer, obtenemos 15 rectángulos áureos iguales.

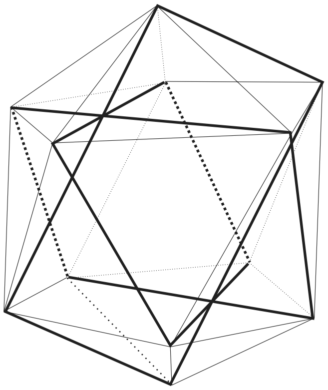
Pues bien, siempre que se tomen tres cualesquiera de estos rectángulos, con la condición de que dos de los lados menores (aristas) no concurran en el mismo vértice del icosaedro, generarán el icosaedro.

Todas las posibilidades que se obtienen se reducen a estas dos:

Caso 1: Que los tres rectángulos se intersequen bajo ángulos de 90º, es decir la construcción del principio.

Caso 2: Que los tres rectángulos se corten bajo ángulos de 60º de la siguiente forma:





Figuras 8 y 9

Para justificar esta afirmación necesitamos una serie de resultados.

Pentágono y ϕ

Para hallar la relación entre la diagonal y el lado del pentágono regular parece más sencillo dar los siguientes pasos:

1º) Demostrar que los triángulos *BED* y *BCF* son semejantes, algo casi evidente si tenemos en cuenta que las diagonales dividen los ángulos *A, B, C, D* y *E* en tres partes iguales y que los triángulos citados son isósceles.

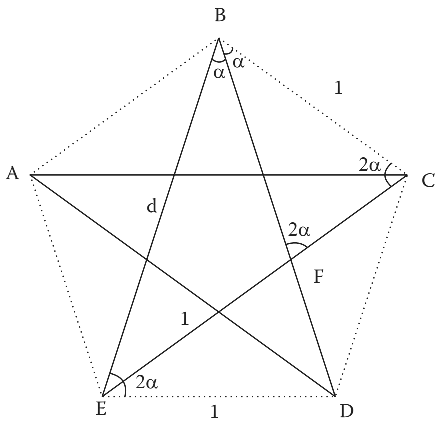


Figura 10

2º) Supongamos que las diagonales del pentágono miden d unidades y consideramos el pentágono de lado 1, que nos simplificará los cálculos.

Si *BED* y *BFC* son semejantes,

$$\Rightarrow \frac{\overline{BE}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} \Rightarrow \frac{d}{1} = \frac{1}{d-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(d-1) = 1 \Rightarrow d^2 - d - 1 = 0 \Rightarrow d = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

es decir,

$$d = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$$

Caso 1: Que los tres rectángulos se intersequen bajo ángulos de 90º.

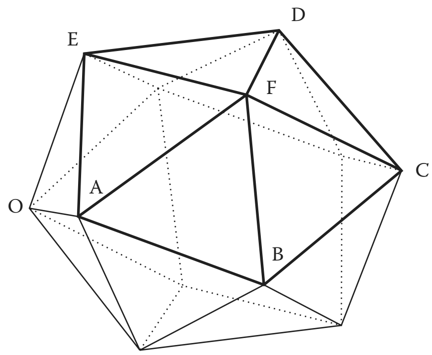


Figura 11

Por ejemplo, en la pirámide pentagonal *ABCDEF* tomemos el rectángulo áureo de lado menor *AB*; el rectángulo perpendicular a éste en esta pirámide es el de lado menor *FD*. El tercer rectángulo perpendicular a estos dos solo puede ser el de lado menor *OE*.

Si en lugar de empezar con el lado *AB*, comenzamos por otro cualquiera de los cinco lados restantes del pentágono *ABCDE*, obtenemos otra terna de rectángulos áureos perpendiculares. Por lo tanto hay cinco ternas de rectángulos perpendiculares que generan el icosaedro; pero en esencia son la misma.

Caso 2: Que los rectángulos se corten bajo ángulos de 60º.

En la figura 11, habíamos partido del rectángulo áureo de lado menor AB de la pirámide pentagonal *ABCDEF*; el siguiente rectángulo áureo cuyo lado menor no parta del mismo vértice que el anterior, y que no sea perpendicular a él, puede ser el que tenga por lado menor *EF*, en cuyo caso el tercer rectángulo que cumple la condición solo puede ser el de lado menor *DC*.

Si en lugar de comenzar con el lado *AB*, comenzamos con cualquier otro de los cinco lados restantes del pentágono *ABCDE*, y procedemos de la misma forma, obtenemos otra terna de rectángulos áureos generadores formando ángulos de 60º entre sí.

Estas cinco ternas se obtienen haciendo giros consecutivos (en el sentido de las agujas del reloj) de 72º alrededor de la diagonal del icosaedro con vértice en *F*. Pero, si a la terna *AB*, *EF*, *DC*, le efectuamos un giro de 72º alrededor de la diagonal del icosaedro con vértice en *A* (origen del segmento *AB*), también en sentido de las agujas del reloj, obtenemos otra terna distinta; y si esto lo repetimos con cada una de las cinco ternas anteriores, obtenemos otra distinta por cada una de las primeras. En total obtenemos diez ternas generadoras distintas que se cortan bajo ángulos de 60º (ó 120º). Pero en esencia son todas idénticas.

Evidentemente si los giros se hacen en sentido contrario a las agujas del reloj, las cuentas salen igual.

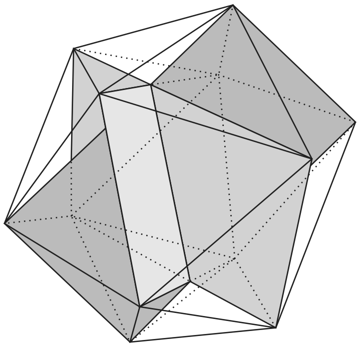


Figura 12

El icosaedro tiene 30 aristas; si las enfrentamos de dos en dos, obtenemos 15 rectángulos áureos iguales. Tres cualesquiera de estos, con la condición de que dos de los lados menores (aristas) no concurran en el mismo vértice del icosaedro, generaran el icosaedro.

Veámoslo de otra forma.

Ya hemos visto que cada vértice del icosaedro de arista *a* sustenta una pirámide pentagonal.

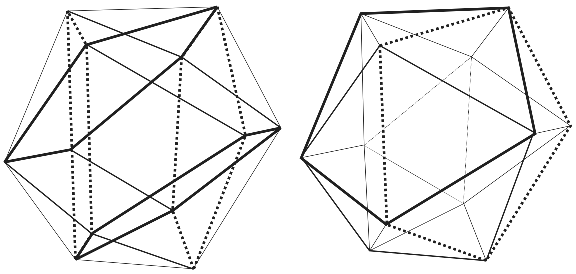


Figura 13

y además dos vértices no consecutivos ni opuestos lo son a su vez del pentágono regular de lado *a*, luego la recta que los une es siempre una diagonal de dicho pentágono:

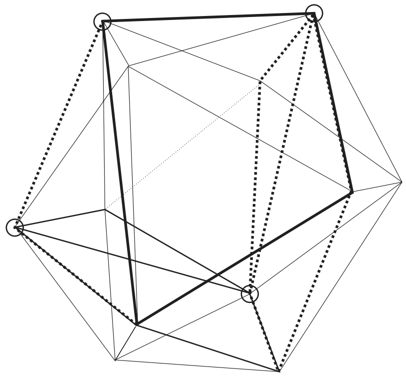


Figura 14

Si en cada pentágono trazamos *todas* las diagonales encontramos un nuevo pentágono de lado a/Φ^2, como veremos más adelante. O sea, 12 nuevos pentágonos puesto que hay 12 pirámides pentagonales distintas.

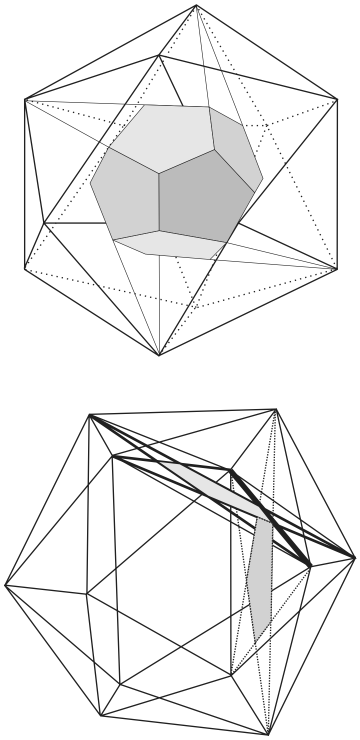


Figura 15

Como cada diagonal de los pentágonos es común a las dos pirámides pentagonales que forman dos vértices consecutivos (la arista del icosaedro que los une es perpendicular a dicha diagonal), resulta que los doce pentágonos son las caras de un dodecaedro de arista a/ϕ^2.

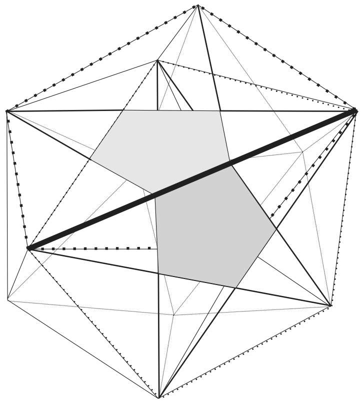


Figura 16

Así, las 5x12=60 diagonales de los pentágonos se cortan de tres en tres para producir los 60:3=20 vértices del dodecaedro.

La intersección de dichas diagonales es interesante: Dos de ellas son siempre coplanarias y son no concurrentes en un vértice del pentágono (aunque se cortan claramente en un vértice del dodecaedro). La tercera, une la cúspide de la pirámide que tiene como base al pentágono que determinan las dos diagonales anteriores, con la cúspide de la pirámide contigua que tiene común con la anterior la arista determinada por ambas diagonales:

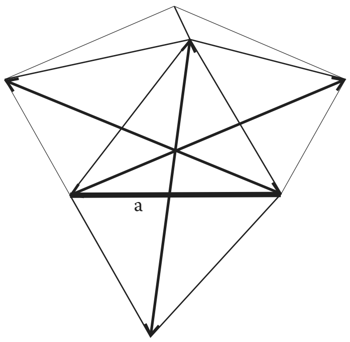


Figura 17

Lo anterior constituye otra forma de ver las tríadas de rectángulos áureos no ortogonales. Dos rectángulos tienen el lado aϕ en dos diagonales (no concurrentes en un vértice) de un mismo pentágono. El tercer rectángulo tiene el lado aϕ sobre la diagonal que une la cúspide de la pirámide que tiene como base al pentágono que determinan las dos diagonales anteriores, con la cúspide de la pirámide contigua que tiene común con la anterior la arista determinada por ambas diagonales.

En el dibujo, aparte de la construcción, se ve cómo tres rectángulos de este tipo determinan los 12 vértices de un icosaedro. La vista del poliedro es aquella en la que se oponen dos pentágonos en planos paralelos al plano horizontal.

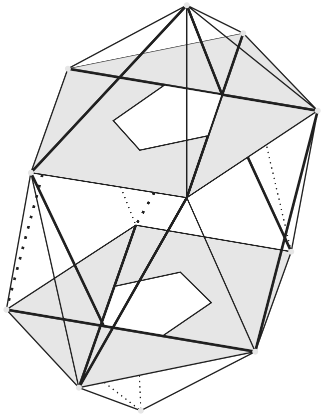


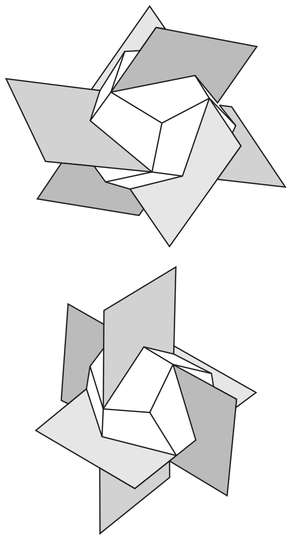
Figura 18

Como se ha comentado, el número de rectángulos áureos distintos del icosaedro es 15 pues enfrentamos dos a dos las 30 aristas opuestas del mismo.

Si intersecamos tres de ellos de forma ortogonal tenemos 5 construcciones distintas (partiendo en cada caso de las cinco aristas que concurren en un punto) que utilizan los 5x3 = 15 rectángulos aludidos.

Por otro lado si la construcción es no ortogonal, hay 10 formas distintas de elegir las tríadas de rectángulos, puesto que cada una de ellas se interseca a lo largo de una diagonal del dodecaedro. Como el dodecaedro tiene 10 diagonales resulta: 10 diagonales por tres rectángulos que determinan cada diagonal = 30 rectángulos; pero como cada rectángulo participa en dos tríadas distintas (cada diagonal de los pentágonos del icosaedro contiene dos vértices distintos del dodecaedro), 30=2 x 15 (n.º rectángulos áureos distintos).

Caso 1



Caso 2

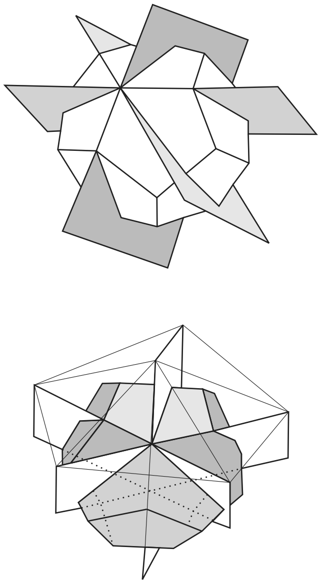


Figura 19

Estudio del ángulo de corte

De lo anterior observamos que en estas ternas, dos rectángulos se cortan a lo largo de la recta que une dos vértices opuestos del dodecaedro. Este dodecaedro (no inscrito) es el que se forma en el interior del icosaedro al trazar todas sus diagonales.

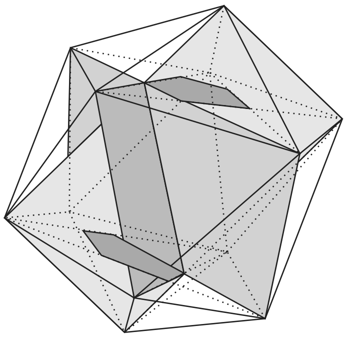


Figura 20

a) Relaciones entre el rectángulo y este dodecaedro:

En la figura 21 tenemos una construcción clásica (pentalfa).

Los triángulos: *ABC* y *CDE* son semejantes por tener los ángulos iguales, y

$$\overline{CE} = \Phi L_P$$

$$\Rightarrow \frac{\Phi L_P}{L_P} = \frac{L_P}{b} \Rightarrow b = \frac{L_P}{\Phi}$$

$$x = \Phi L_P - 2b = \Phi L_P - \frac{2L_P}{\Phi} = \frac{L_P\left(\Phi^2 - 2\right)}{\Phi} =$$
$$= \frac{L_P(\Phi - 1)}{\Phi} = L_P\left(1 - \frac{1}{\Phi}\right) = \frac{L_P}{\Phi^2}$$

$$2b + x = 2\frac{L_P}{\Phi} + \frac{L_P}{\Phi^2} = \frac{L_P(2\Phi + 1)}{\Phi^2} = \Phi L_P$$

Esta medida x es la del lado del dodecaedro que se forma en el interior del icosaedro al trazar todas las diagonales en las bases pentagonales de las 12 pirámides.

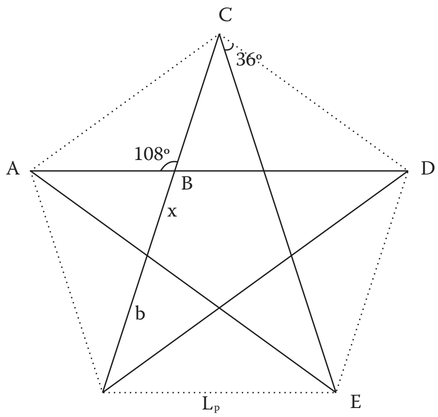


Figura 21

b) Sean ahora dos de los rectángulos áureos que se cortan de forma no ortogonal, es decir a lo largo de una diagonal del dodecaedro:

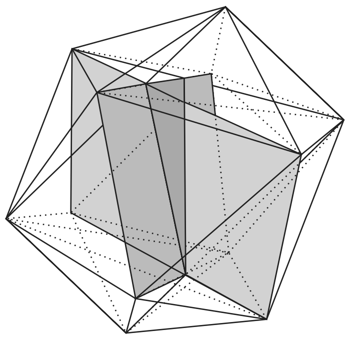


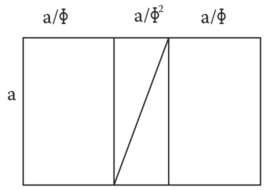
Figura 22

a = lado del icosaedro

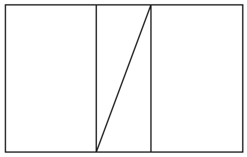
a/ϕ^2= lado del pentágono que es cara del dodecaedro

$a/\phi + a/\phi^2 + a/\phi = a\phi$ (largo).

Es curioso observar que los dos rectángulos de medidas a y a/ϕ son nuevamente áureos.



rectángulo 1



rectángulo 2

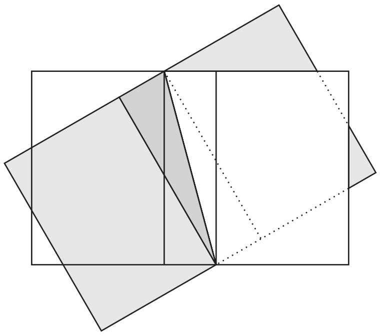
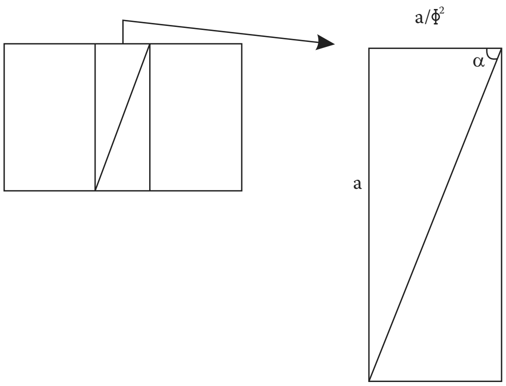


Figura 23

Estudio del corte:



$\alpha = \arctan \phi^2$

$\alpha = 69^{\circ}\ 5'41{,}1...''$

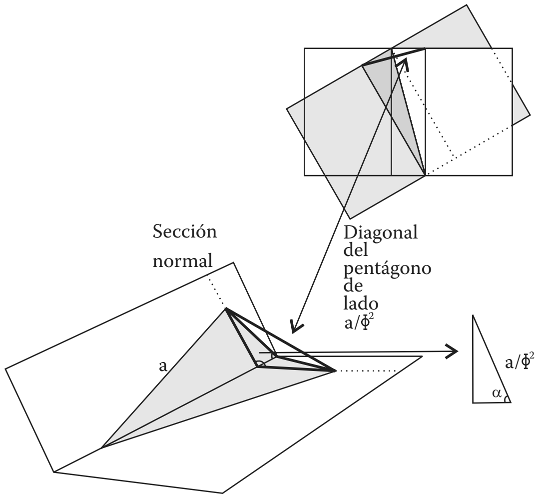


Figura 24

Sea el ángulo que forma el lado menor con la diagonal en el rectángulo de lados a y a/ϕ^2,

$$sen\alpha = \frac{\Phi^2}{\sqrt{1+\Phi^4}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\Phi^4}}$$

$$\tan\alpha = \Phi^2$$

Como

$$\sqrt{\Phi^4+1} = \Phi\sqrt{3}$$

se obtiene

$$sen\alpha = \frac{\Phi}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\Phi\sqrt{3}}$$

$$\tan\alpha = \Phi^2$$

Dado que uno de los triángulos es el formado por dos lados consecutivos del pentágono y la diagonal correspondiente, al ser el lado del pentágono a/ϕ^2, la diagonal vale a/ϕ por ser ϕ veces el lado.

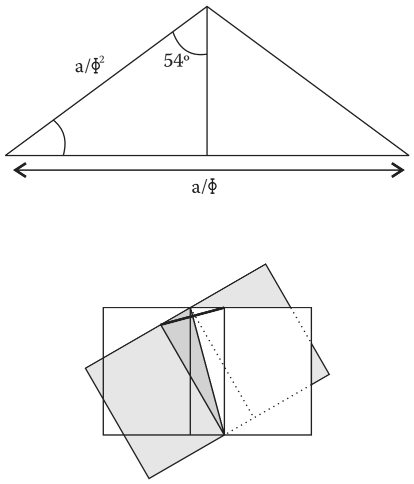
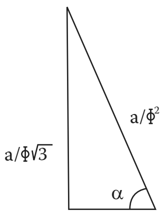


Figura 25

Por otra parte, el triángulo rectángulo de la figura en que se estudia el corte está resuelto:



$$\frac{a}{\Phi^2} sen\alpha = \frac{a}{\Phi\sqrt{3}}$$

Figura 26

Luego, para calcular el ángulo de la sección normal, basta considerar el triángulo isósceles:

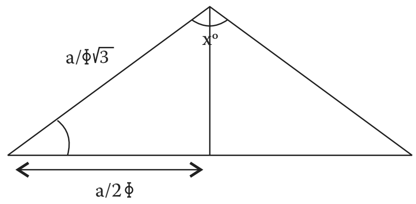


Figura 27

$$sen\frac{x}{2} = \frac{\dfrac{a}{2\Phi}}{\dfrac{a}{\Phi\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

y por lo tanto $x/2 = 60º$ y $x = 120º$.

Así pues, el corte de ambos planos es de 120º ó 60º.

Es decir solo hay dos tipos de ternas de rectángulos áureos que generen al icosaedro. Todas las demás posibilidades se reducen a una de éstas estudiadas.

Un icosaedro particular y ϕ

a) Un poliedro en el Instituto

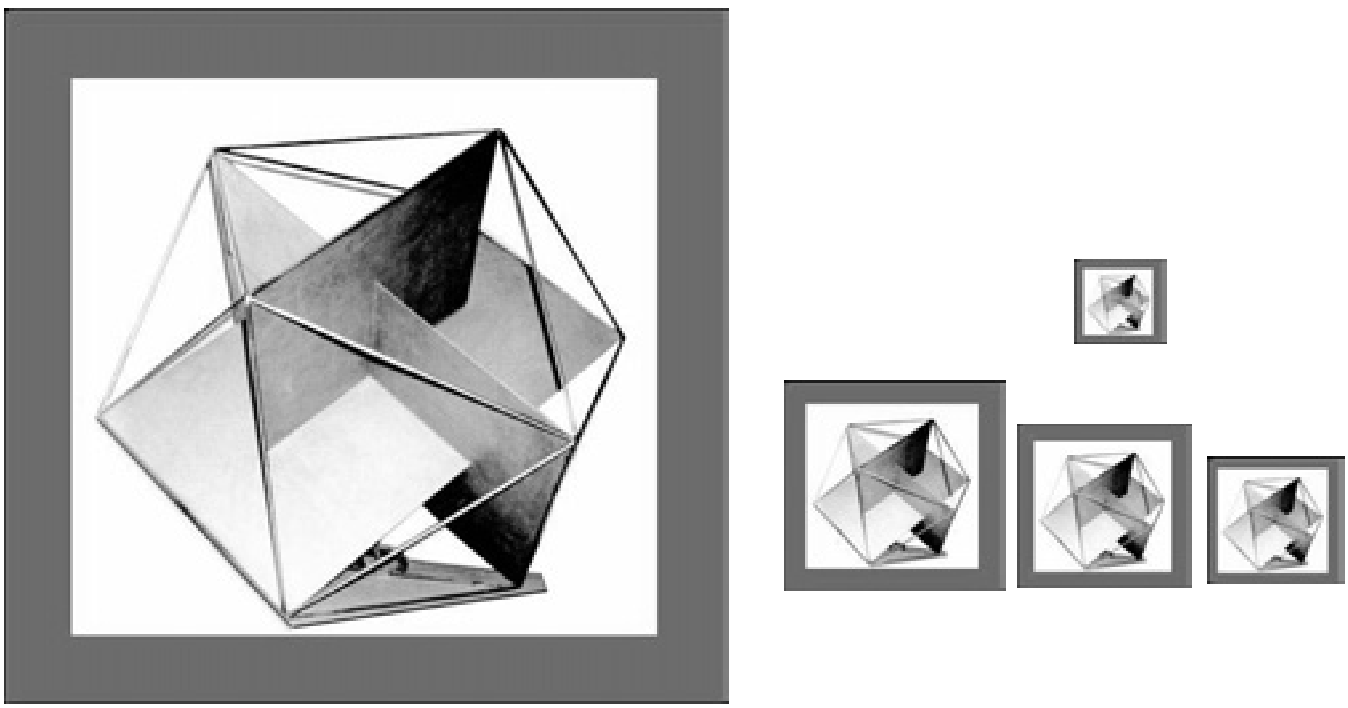
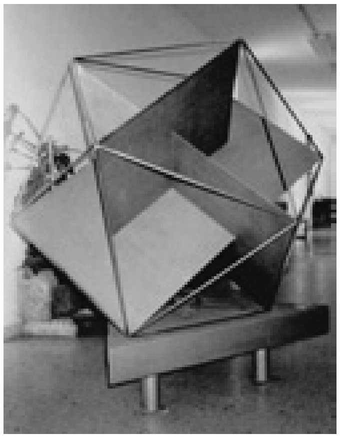


Figura 28

Nuestra primera idea fue construir una escultura matemática en la que se vieran reflejados el mayor número de resultados geométricos y algebraicos, que fuera atrayente por su belleza, y que, de este modo, quedara como una contribución del Departamento de Matemáticas del IES Antonio García Bellido al Año Mundial de las Matemáticas.

Este cuerpo poliédrico formado por 20 triángulos equiláteros y que está sustentado por tres rectángulos áureos que se intersecan bajo ángulos de 90º nos pareció la mejor idea, ya que al tener sólo las aristas deja al descubierto toda su estructura interna.



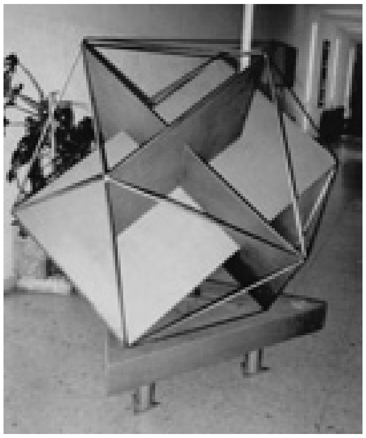


Figura 29. Icosaedro en el pasillo del IES *Antonio García Bellido*

b) Logotipo del Departamento

La escultura matemática lleva varios cursos presidiendo un pasillo atestado a veces de alumnos. El polvo de las sucesivas obras a las que ha estado sometido el Centro puede, en ocasiones, apagar su brillo, pero continúa siendo fascinante explorarla. Es una actividad que se realiza de forma personal... o acaso en *petit comité* según hemos observado. Resulta una figura sencilla que a su vez no se abarca de un *vistazo*...

De forma natural surgió la idea de aprovecharla para idear el LOGO del Departamento. Una cámara de fotos y unos retoques bastaron para ello (ver figura 28). ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALSINA, C. Y TRILLAS, E (1984): *Lecciones de Álgebra y Geometría. Curso para estudiantes de Arquitectura*, Gustavo Gili, Barcelona.

COURANT, R. Y ROBBINS, H. (1979): *¿Qué es la Matemática?*, Aguilar, Madrid.

ENRIQUES, F. (1954): *Los Elementos de Euclides y la Crítica Antigua y Moderna*, Publicaciones del Instituto Jorge Juan de Matemáticas, Madrid.

EUCLIDES (1999): *Los siete primeros libros de la Geometría de Euclides*, Ediciones Universidad de Salamanca, Salamanca.

GHYKA, MATILA C. (1983): *Estética de las proporciones en la Naturaleza y en las Artes*, Poseidón, Barcelona.

PACIOLI, L. (1991): *La Divina Proporción*, Akal, Madrid.

VERA, F. (1970): *Científicos griegos*, Aguilar, Madrid.